3. 非線形方程式の解法

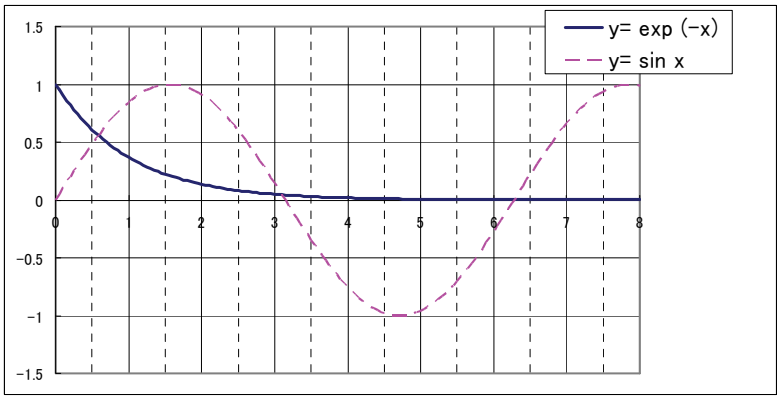
非線形方程式 f(x)=0 の根を求める。

3.1 Newton 法

【アルゴリズム】

```
x := 与えられた初期値
for k=0,1,2,…          {収束するまで繰り返す}
    Δx := -f(x)/f'(x)
    x := x + Δx
end
```

【問題】 f(x) = exp(-x) - sin x = 0 の根は無数にあるが，その根を一つづつニュートン法により求める。
下図より，x を大きくすると，根は kπ (k=1,2,3,…)に近づいていくことがわかる。



【プログラム3.1.1】

```
/* Newton's Method to solve f(x)=0 */

#include <stdio.h>          /* いつものおまじない：標準入出力用ヘッダーファイル */
#include <math.h>           /* 数学関数用ヘッダーファイル：関数 fabs() 等を使用しているので必要となる */

#define KMAX 20             /* マクロにより，Newton 法における最大反復回数を定義する */

void eval(float, float *, float *);   /* 関数を main 関数の後に置く場合，関数のプロトタイプ宣言が必要 */

void main(void)                       /* ANSI 規格では main 関数の記述は void main(void) */
{
    float x,eps,f,df,d;                       /* 変数の型宣言 */
    int k;

    printf("initial guess and tolerance: x, eps ? ");   /* 変数の入力の際は，予め printf 文などで促す */
    scanf("%g%g", &x, &eps);                  /* x の初期値と収束判定値εの値の読み込み */

                /* 注意：  日本語キーボードの¥は，US キーボードのバックスラッシュ\となる：  \n, \t 等 */
    printf("\n k\tx\t\tf(x)\t\tf'(x)\t\tcorrection\n");
                /* 上の文は，以下のようにタブ(\t)を使わずに書いてもよい */
                /* printf(" k       x              f(x)            f'(x)           correction\n"); */
    for(k=0; k<KMAX; k++){                    /* Newton 法の反復により，根を求めるためのループ */
        eval(x, &f, &df);                         /*   関数 eval で f(x) と f'(x) の値を計算する */
        d= -f/df;                                 /*   Δx = f(x)/f'(x) の計算   */
        printf("%2d %15.6e %15.6e %15.6e %15.6e\n", k, x, f, df, d);
        x +=d;                                    /*   x ← x + Δx   */
```

```
27          if(fabs(f)<eps) break;                          /*   |f(x)| < εならば，ループを出る   */
28      }
29      if(k>=KMAX) printf("not convergent?\n");   /*  k=KMAX のときは，収束していない恐れがある旨を出力  */
30      printf("\nroot=%g\n", x);                  /*  f(x)=0 の根 x を出力  */
31  }
32
33  void eval(float x, float *f, float *df)        /* ANSI 規格では，引数欄に変数の型宣言を記述 */
34  {
35      float e;                              /* 変数の型宣言 */
36      e= exp(-x);
37      *f =  e - sin(x);                             /* f(x)  =  exp(-x) - sin x */
38      *df= -e - cos(x);                             /* f'(x) = -exp(-x) - cos x */
39  }
```

【実行例】

1) 初期値を0.5，収束判定値を 10^{-6} とする。

```
----------実行開始----------
initial guess and tolerance: x, eps ?  0.5  1.0e-6

 k       x              f(x)             f'(x)            correction
 0    5.000000e-01    1.271051e-01   -1.484113e+00    8.564382e-02
 1    5.856438e-01    4.011282e-03   -1.390104e+00    2.885599e-03
 2    5.885294e-01    4.611285e-06   -1.386901e+00    3.324884e-06
 3    5.885327e-01   -1.274799e-08   -1.386897e+00   -9.191734e-09

root=0.588533
----------おしまい----------
```

2) 初期値を3.0とする。

```
----------実行開始----------
initial guess and tolerance: x, eps ?  3.0  1.0e-6

 k       x              f(x)             f'(x)            correction
 0    3.000000e+00   -9.133294e-02    9.402055e-01    9.714147e-02
 1    3.097142e+00    7.416478e-04    9.538341e-01   -7.775439e-04
 2    3.096364e+00    8.331214e-08    9.537641e-01   -8.735089e-08

root=3.09636
----------おしまい----------
```

3) 初期値を6.0とする。

```
----------実行開始----------
initial guess and tolerance: x, eps ?  6.0  1.0e-6

 k       x              f(x)             f'(x)            correction
 0    6.000000e+00    2.818942e-01   -9.626490e-01    2.928318e-01
 1    6.292832e+00   -7.796926e-03   -1.001803e+00   -7.782893e-03
 2    6.285049e+00    3.122672e-07   -1.001862e+00    3.116868e-07

root=6.28505
----------おしまい----------
```

3.2 二分法

【アルゴリズム】

x_1, x_2 := 初期区間の端点 ($x_1 < x_2$)
while (x_2-x_1) > ε do
　$x_m := (x_1+x_2)/2$
　if $f(x_1) \cdot f(x_m)<0$ then
　　$x_2 := x_m$
　else
　　$x_1 := x_m$
　end
end

【問題】3.1節と同じ問題f(x)=0の根を，一つづつ二分法により求める。

プログラム3.2.1は，$f(x_1)$と$f(x_m)$が異符号かどうかの判定を，$f(x_1) \cdot f(x_m) < 0$かどうかで行っている。
ただし，$f(x_1)$ と $f(x_m)$の値が非常に大きい（あるいは非常に小さい）とき，乗算 $f(x_1) \cdot f(x_m)$はオーバーフロー（あるいはアンダーフロー）を招く恐れがある。
これを防ぐため，プログラム3.2.2では，符号を設定する関数 sign() を定義し，異符号かどうかの判定を
$sign(f(x_1)) \cdot sign(f(x_m)) <0$ で行う。
数値計算の実用プログラムは，このような細部にまで配慮が行き届いているものが多い。
が，最初はあまり気にしないで始めましょう！

【プログラム3.2.1】

```
 1 /* bisectional method to solve f(x)=0 */
 2
 3 #include <stdio.h>          /* いつものおまじない：標準入出力用ヘッダーファイル */
 4 #include <math.h>           /* 数学関数用ヘッダーファイル：関数 sin を使用しているので必要 */
 5
 6                             /* 関数をmain関数よりも前に置けば，関数のプロトタイプ宣言は必要なし */
 7 float f(float x)            /* 関数 f(x)= exp(-x) - sin x  ;ANSI規格では，引数欄に変数の型宣言を記述 */
 8 {
 9     return( exp(-x) - sin(x) );
10 }
11
12 void main(void)                          /* ANSI規格ではmain関数の記述は void main(void) */
13 {
14     float x1,x2,eps,f1,xm,fm;
15     int i;
16
17     printf("initial interval [x1,x2] (x1<x2) and tolerance: x1,x2,eps ?  ");        /* 入力促し */
18     scanf("%g%g%g",&x1,&x2,&eps);                                                  /* x1, x2, epsの入力 */
19
20             /* 注意：  日本語キーボードの¥は，USキーボードのバックスラッシュ\となる：  \n, \t 等 */
21     printf("\n i\tx1\tx2\t\txm\t\tf(xm)\n");
22     i=0;                                        /* カウンター(i)の零設定 */
23
24     while( (x2-x1)>eps ){              /* 区間幅がeps以下になるまで区間分割を繰り返す */
25             i+=1;                                        /* カウンター(i)に1を加える */
26             xm=(x1+x2)/2; f1=f(x1); fm=f(xm);            /* xm: x1とx2の中点座標 */
27             printf("%2d %15.6e %15.6e %15.6e %15.6e\n", i,x1,x2,xm,fm);
28
29             if( f1*fm < 0 ){                     /* f(x1)とf(xm)が異符号ならば，解は区間[x1,xm]にある */
```

```
30              x2=xm;                                  /* 区間[x1,xm]を新たに区間[x1,x2]とする */
31            }else{                                /* f(x1)とf(xm)が同符号ならば，解は区間[xm,x2]にある */
32              x1=xm;                                  /* 区間[xm,x2]を新たに区間[x1,x2]とする */
33            }
34    }
35    printf("\nA root found between %g and %g\n", x1, x2);                  /* 解の出力 */
36 }
```

【プログラム3.2.2】

```
 1 /* bisectional method to solve f(x)=0 */
 2
 3 #include <stdio.h>          /* いつものおまじない：標準入出力用ヘッダーファイル */
 4 #include <math.h>           /* 数学関数用ヘッダーファイル：関数 sin, cos を使用しているので必要 */
 5
 6                            /* 関数をmain関数よりも前に置けば，関数のプロトタイプ宣言は必要なし */
 7 float f(float x)            /* 関数 f(x)= exp(-x) - sin x ；ANSI規格では，引数欄に変数の型宣言を記述 */
 8 {
 9    return( exp(-x) - sin(x) );
10 }
11
12 float sign(float r)         /* 符号を設定する関数 */
13 {
14    if( r==0 ){
15       return(0.0);
16    }else if( r>0 ){
17       return(1.0);
18    }else{
19       return(-1.0);
20    }
21 }
22
23 void main(void)                          /* ANSI規格ではmain関数の記述は void main(void) */
24 {
25    float x1,x2,eps,f1,xm,fm;
26    int i;
27
28    printf("initial interval [x1,x2] (x1<x2) and tolerance: x1,x2,eps ? ");        /* 入力促し */
29    scanf("%g%g%g",&x1,&x2,&eps);                                                 /* x1, x2, epsの入力 */
30                /* 注意：　日本語キーボードの¥は，USキーボードのバックスラッシュ\となる：\n, \t 等 */
31    printf("\n i\tx1\tx2\t\txm\t\tf(xm)\n");
32    i=0;                                        /* カウンター(i)の零設定 */
33
34    while( (x2-x1)>eps ){              /* 区間幅がeps以下になるまで区間分割を繰り返す */
35          i+=1;                                 /* カウンター(i)に1を加える */
36          xm=(x1+x2)/2; f1=f(x1); fm=f(xm);     /* xm: x1とx2の中点座標 */
37          printf("%2d %15.6e %15.6e %15.6e %15.6e\n", i,x1,x2,xm,fm);
38
39          if( sign(f1)*sign(fm) < 0 ){        /* f(x1)とf(xm)が異符号ならば，解は区間[x1,xm]にある */
40             x2=xm;                                  /* 区間[x1,xm]を新たに区間[x1,x2]とする */
41          }else{                                /* f(x1)とf(xm)が同符号ならば，解は区間[xm,x2]にある */
42             x1=xm;                                  /* 区間[xm,x2]を新たに区間[x1,x2]とする */
43          }
44    }
45    printf("\nA root found between %g and %g\n", x1, x2);                  /* 解の出力 */
```

```
46 }
```

【実行例】

初期区間幅を[0,1]，収束判定区間値を 10^{-6} とすると，プログラム3.2.1，3.2.2とも以下の結果を得る。

```
-------------------------実行開始-----------------------
initial interval [x1,x2] (x1<x2) and tolerance: x1,x2,eps ?  0.0  1.0  1.0e-6

 i       x1       x2               xm               f(xm)
 1    0.000000e+00    1.000000e+00    5.000000e-01     1.271051e-01
 2    5.000000e-01    1.000000e+00    7.500000e-01    -2.092722e-01
 3    5.000000e-01    7.500000e-01    6.250000e-01    -4.983585e-02
 4    5.000000e-01    6.250000e-01    5.625000e-01     3.648015e-02
 5    5.625000e-01    6.250000e-01    5.937500e-01    -7.220681e-03
 6    5.625000e-01    5.937500e-01    5.781250e-01     1.449455e-02
 7    5.781250e-01    5.937500e-01    5.859375e-01     3.603075e-03
 8    5.859375e-01    5.937500e-01    5.898438e-01    -1.817276e-03
 9    5.859375e-01    5.898438e-01    5.878906e-01     8.907820e-04
10    5.878906e-01    5.898438e-01    5.888672e-01    -4.637767e-04
11    5.878906e-01    5.888672e-01    5.883789e-01     2.133703e-04
12    5.883789e-01    5.888672e-01    5.886230e-01    -1.252363e-04
13    5.883789e-01    5.886230e-01    5.885010e-01     4.405871e-05
14    5.885010e-01    5.886230e-01    5.885620e-01    -4.059087e-05
15    5.885010e-01    5.885620e-01    5.885315e-01     1.733402e-06
16    5.885315e-01    5.885620e-01    5.885468e-01    -1.942886e-05
17    5.885315e-01    5.885468e-01    5.885391e-01    -8.847763e-06
18    5.885315e-01    5.885391e-01    5.885353e-01    -3.557188e-06
19    5.885315e-01    5.885353e-01    5.885334e-01    -9.118950e-07
20    5.885315e-01    5.885334e-01    5.885324e-01     4.107532e-07

A root found between 0.588532 and 0.588533
-------------------------おしまい-----------------------
```

先にニュートン法の実行例1)で求めた数値解と同じ値が得られる。

3.3 多項式の効率的な計算アルゴリズム

n 次多項式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

の値を効率的に求めるアルゴリズムには以下のものがある。

ホーナー法： ①式は

$$f(x) = ((\cdots (((a_0 x + a_1) x + a_2) x + a_3) \cdots + a_{n-1}) x + a_n) \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

と書き直されることから，以下のアルゴリズムにより $f(\alpha)= p_n$ の値を計算できる。

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = a_0 \\ p_i = p_{i-1} \ \alpha + a_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \end{array} \right\}$$

組立て除法： ①式は

$$f(x) = a_0^{(n)}(x-\alpha)^n + a_1^{(n)}(x-\alpha)^{n-1} + a_2^{(n-1)}(x-\alpha)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}^{(2)}(x-\alpha) + a_n^{(1)} \quad \cdots \quad ③$$

と書き直すことができ，$a_n^{(1)}$，$a_{n-1}^{(2)}\cdots$ は以下のアルゴリズムにより求まる。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0^{(1)} = a_0 \\ a_i^{(1)} = a_{i-1}^{(1)} \alpha + a_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad a_n^{(1)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0^{(2)} = a_0^{(1)} \\ a_i^{(2)} = a_{i-1}^{(2)} \alpha + a_i^{(1)} \quad (i=1,2,\cdots,n-1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad a_{n-1}^{(2)}$$

これは以下のように組立除法を二回行うことに相当する。

	$a_0^{(0)}$	$a_1^{(0)}$	$a_2^{(0)}$	$\cdots$	$a_{n-2}^{(0)}$	$a_{n-1}^{(0)}$	$a_n^{(0)}$
+)		$a_0^{(1)}\alpha$	$a_1^{(1)}\alpha$	$\cdots$	$a_{n-3}^{(1)}\alpha$	$a_{n-2}^{(1)}\alpha$	$a_{n-1}^{(1)}\alpha$
	$a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$a_2^{(1)}$	$\cdots$	$a_{n-2}^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$[a_n^{(1)}]$
+)		$a_0^{(2)}\alpha$	$a_1^{(2)}\alpha$	$\cdots$	$a_{n-3}^{(2)}\alpha$	$a_{n-2}^{(2)}\alpha$	
	$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	$\cdots$	$a_{n-2}^{(2)}$	$[a_{n-1}^{(2)}]$	

③式より，

$$f(\alpha)= a_n^{(1)}$$

$$f'(\alpha)= a_{n-1}^{(2)}$$

であるから，結局 $f(\alpha)=p$，$f'(\alpha)=q$ の値は次のアルゴリズムにより計算できる。

【アルゴリズム】

組立て除法：

```
p:= a0
q:= p
for i=1 to n-1
    p:=p*α + ai
    q:=q*α + p
end
p:= p*α + an
```

なお，ホーナー法のアルゴリズムは，組立除法により p を求めるアルゴリズムと同一のものである。

【問題】 n 次多項式 f(x)とその導関数 f'(x)を組立除法により求め，x の区間$[x_{min}, x_{max}]$におけるグラフをエクセル等で描く。

まず，多項式 f(x)の次数 n と係数 a_0，a_1，…，a_n を読み込んで関数を決定し，x の最小値 x_{min} と最大値 x_{max}，およびその区間の分割数 m を読み込んで $\Delta x=(x_{max}-x_{min})/m$ を算出し，

$$x_k = x_{min} + k \ \Delta x \qquad (k=0,1,2,\cdots,m)$$

における関数値 $f(x_k)$ を計算し，出力する。
これよりエクセル等によりグラフを作成し，関数の分布を視覚的に確認する。

【プログラム 3.3.1】

```
 1 /* Efficient evaluation for polynomial and its derivative */
 2
 3 #include <stdio.h>
 4
 5 #define NMAX 10
 6 #define KMAX 20
 7
 8 float a[NMAX+1];       /* external variables can be accessed by any function */
 9 int n;
10
11 void eval(float x, float *f, float *df)    /* computes p(x) and q(x)=p'(x) */
12 {
13     int i;
14     float p,q;
15
16     p= a[0];
17     for(q=p,i=1;i<n;i++){
18         p=p*x+a[i];
19         q=q*x+p;
20     }
21     p=p*x+a[n];
22     *f = p;
23     *df= q;
24 }
25
26 void main(void)
27 {
28     float x,xmin,xmax,dx,f,df;
29     int i,m,k;
30
31     printf("degree of polynomial: n ? ");
32     scanf("%d", &n);
33     printf("coefficients of polynomial:\n");
34     for(i=0;i<=n;i++){
35             printf("a[%d] ? ",i);
36             scanf("%g", &a[i]);
37     }
38     printf("x range [xmin, xmax] and division number m: xmin,xmax,m ? ");
39     scanf("%g%g%d", &xmin, &xmax, &m);
40     dx=(xmax-xmin)/m;
41
42     printf("\n k\t x\t f(x)\t f'(x)\n");
43
44     for(k=0;k<=m;k++){
45        x=xmin+k*dx;
46        eval(x, &f, &df);
47        printf("%2d\t%12.5f\t%15.6f\t%15.6f\n",k,x,f,df);
48     }
49 }
```

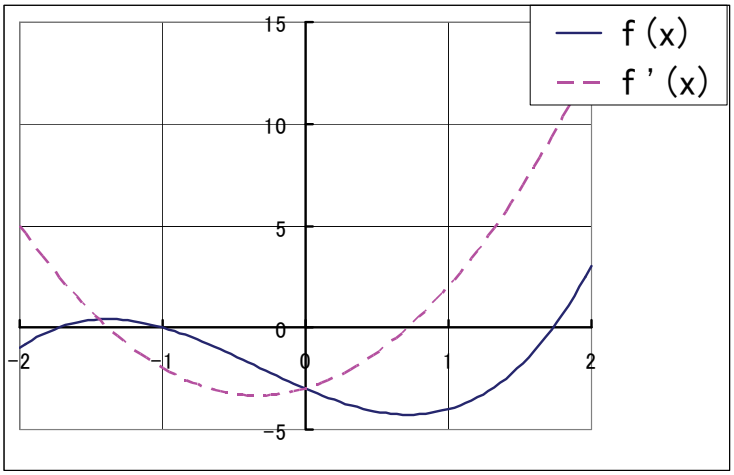
【実行例】

3次多項式 $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ とその導関数の値を，区間[-2,2]，分割数100で出力する。

```
-------------------------実行開始-----------------------
degree of polynomial: n ? 3
coefficients of polynomial:
a[0] ? 1
a[1] ? 1
a[2] ? -3
a[3] ? -3
x range [xmin, xmax] and division number m: xmin,xmax,m ? -2 2 100

 k        x         f(x)      f'(x)
 0          -2.00000          -1.000000          5.000000
 1          -1.96000          -0.807936          4.604800
 2          -1.92000          -0.631488          4.219200
 3          -1.88000          -0.470272          3.843200
 4          -1.84000          -0.323904          3.476800
 5          -1.80000          -0.192000          3.120000
 6          -1.76000          -0.074176          2.772800
 7          -1.72000           0.029952          2.435200
 8          -1.68000           0.120768          2.107200
 9          -1.64000           0.198656          1.788800
10          -1.60000           0.264000          1.480000
                 :                  :                 :
                 :                  :                 :
                 :                  :                 :
95           1.80000           0.671999         10.319999
96           1.84000           1.095103         10.836799
97           1.88000           1.539071         11.363199
98           1.92000           2.004287         11.899199
99           1.96000           2.491135         12.444799
100          2.00000           2.999999         12.999999
-------------------------おしまい-----------------------
```

エクセルによるグラフ



グラフより，$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ は3根を持つことがわかる。

【応用例】多項式の効率的な計算アルゴリズムを用いて，n次多項式の根をニュートン法により求める。

【プログラム 3.3.2】

```
 1 /* Newton's Method for f(x)=0 with efficient evaluation for a polynomial and its derivative */
 2
 3 #include <stdio.h>
 4 #include <math.h>
 5
 6 #define NMAX 10
 7 #define KMAX 20
 8
 9 float a[NMAX+1];       /* external variables can be accessed by any function */
10 int n;
11
12 void eval(float x, float *f, float *df)    /* computes p(x) and q(x)=p'(x) */
13 {
14     int i;
15     float p,q;
16
17     p= a[0];
18     for(q=p,i=1;i<n;i++){
19         p=p*x+a[i];
20         q=q*x+p;
21     }
22     p=p*x+a[n];
23     *f = p;
24     *df= q;
25 }
26
27 void main(void)
28 {
29     float x,f,df,d,eps;
30     int i,k;
31
32     printf("degree of polynomial: n ? ");
33     scanf("%d", &n);
34     printf("coefficients of polynomial:\n");
35     for(i=0;i<=n;i++){
36             printf("a[%d] ? ",i);
37              scanf("%g", &a[i]);
38     }
39
40     while(1){
41        printf("\ninitial guess and tolerance: x, eps ?  "); /* EOF : 入力終了コードを検出   */
42        if( scanf("%g%g",&x,&eps)==EOF ) break;              /* したときの関数scanfの戻り値 */
43                                                  /*    MS-DOSでは，終了コードの入力は，CTRL+Z */
44        printf("\n k \t x \t\t f(x) \t f'(x) \t correction \n");
45        for(k=0;k<KMAX;k++){
46           eval(x, &f, &df);
47           d= -f/df;
48           printf("%2d\t%15.6e\t%15.6e\t%15.6e\t%15.6e\n", k, x, f, df, d);
49           x += d;
50           if(fabs(f)<eps) break;
51        }
52        if(k>=KMAX) printf("not convergent?\n");
53        printf("\nroot=%g\n", x);
```

```
54    }
55 }
```

【実行例】

直前の問題の実行例で分布を確認した関数 $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ の3個の根を求める。

```
------------------------実行開始-----------------------
degree of polynomial: n ? 3
coefficients of polynomial:
a[0] ? 1
a[1] ? 1
a[2] ? -3
a[3] ? -3

initial guess and tolerance: x, eps ?  1.5  1.0e-6        ……  初期値1.5, 収束判定値10^-6の入力

 k      x               f(x)     f'(x)    correction
 0         1.500000e+00   -1.875000e+00     6.750000e+00     2.777778e-01
 1         1.777778e+00    4.458163e-01     1.003704e+01    -4.441712e-02
 2         1.733361e+00    1.240710e-02     9.480339e+00    -1.308719e-03
 3         1.732052e+00    1.098788e-05     9.464116e+00    -1.161005e-06
 4         1.732051e+00   -2.942129e-07     9.464101e+00     3.108725e-08

root=1.73205

initial guess and tolerance: x, eps ?  -2  1.0e-6        ……  初期値-2.0, 収束判定値10^-6の入力

 k      x               f(x)     f'(x)    correction
 0        -2.000000e+00   -1.000000e+00     5.000000e+00     2.000000e-01
 1        -1.800000e+00   -1.919999e-01     3.120000e+00     6.153842e-02
 2        -1.738461e+00   -1.642956e-02     2.589822e+00     6.343896e-03
 3        -1.732118e+00   -1.695317e-04     2.536459e+00     6.683793e-05
 4        -1.732051e+00    7.883410e-08     2.535898e+00    -3.108725e-08

root=-1.73205

initial guess and tolerance: x, eps ?  0  1.0e-6         ……  初期値0, 収束判定値10^-6の入力

 k      x               f(x)     f'(x)    correction
 0         0.000000e+00   -3.000000e+00    -3.000000e+00    -1.000000e+00
 1        -1.000000e+00    0.000000e+00    -2.000000e+00     0.000000e+00

root=-1

 x (initial guess), eps (tolerence) ? ^Z (controlとZを同時に押す)  ↵(Enter Keyを押す)
                                                          ……  入力終了コードの入力
------------------------おしまい-----------------------
```

3.4 連立非線形方程式に対するニュートン法

2 変数の連立非線形方程式

$f(x,y)=0$

$g(x,y)=0$

の根を求める。

【アルゴリズム】

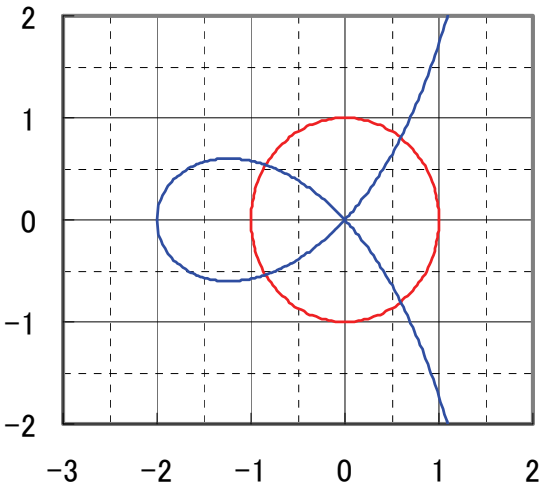
```
x, y := 与えられた初期値
for k=0,1,2,…              {収束するまで繰り返す}
    r:=1.0/(fx*gy-fy*gx)
    Δx:=-r( gy*f-fy*g)
    Δy:=-r(-gx*f+fx*g)
     x := x + Δx
     y := y + Δy
end
```

【問題】

下記の 2 曲線の 4 交点をニュートン法により求めよ。
初期値には，それぞれの交点に近い値を与えるよう留意せよ。

単位円：$f(x,y)=x^2+y^2-1=0$

葉形線：$g(x,y)=x^2(a+x)-y^2(a-x)=0$　（ただし a=2）



【プログラム 3.4.1】

```
 1 /* Solve  System of Nonlinear Equations:    */
 2 /*                        f(x,y)=0, g(x,y)=0 */
 3 /*        by Newtons' Method                 */
 4
 5 #include <stdio.h>
 6 #include <math.h>
 7
 8 #define KMAX 20
 9
10 void eval(float x,   float y,   float *f,  float *g,
11           float *fx, float *fy, float *gx, float *gy)
```

```
12 {
13     float a=2.0;
14
15     *f= x*x+y*y-1;
16     *g= x*x*(a+x)-y*y*(a-x);
17     *fx= 2*x;
18     *fy= 2*y;
19     *gx= 3*x*x+2*a*x+y*y;
20     *gy=-2*y*(a-x);
21     return;
22 }
23
24 void main(void)
25 {
26     float eps,x,y,f,g,fx,fy,gx,gy,rden,dx,dy;
27     int k;
28
29     printf("tolerance: eps ? "); scanf("%g",&eps);
30     while( printf("initial guess: x, y ? "), scanf("%g%g", &x,&y)!=EOF ){
31         printf("\n k \t x \t y \t f(x,y) \t g(x,y)\n");
32         for(k=0;k<KMAX;k++){
33             eval(x,y,&f,&g,&fx,&fy,&gx,&gy);
34             printf("%2d\t%15.6e\t%15.6e\t%15.6e\t%15.6e\n",k,x,y,f,g);
35             rden=1.0/(fx*gy-fy*gx);
36             dx= -rden*(f*gy-fy*g);
37             dy= -rden*(fx*g-f*gx);
38             x += dx;
39             y += dy;
40             if(fabs(dx)+fabs(dy)<eps) break;
41         }
42         if(k>=KMAX) printf("not convergent ?\n");
43         printf("Solutions%15.6g %15.6g¥n¥n", x, y);
44     }
45 }
```

【実行例】

```
------------------------実行開始-----------------------
tolerance: eps ? 1.0e-6                          ……  収束判定値10^-6の入力
initial guess: x, y ? 1.0 0.5                    ……  初期値 (x,y)=(1.0, 0.5) の入力

 k        x          y         f(x,y)    g(x,y)
 0          1.000000e+00     5.000000e-01     2.500000e-01     2.750000e+00
 1          6.756757e-01     8.986486e-01     2.641070e-01     1.520629e-01
 2          6.004339e-01     8.082747e-01     1.382882e-02     2.316294e-02
 3          5.931251e-01     8.051496e-01     6.319632e-05     2.257559e-04
 4          5.930703e-01     8.051507e-01     4.412852e-08    -7.691604e-08
Solutions        0.59307          0.805151

initial guess: x, y ? 1.0 -0.5                   ……  初期値 (x,y)=(1.0, -0.5) の入力

 k        x          y         f(x,y)    g(x,y)
 0          1.000000e+00    -5.000000e-01     2.500000e-01     2.750000e+00
 1          6.756757e-01    -8.986486e-01     2.641070e-01     1.520629e-01
 2          6.004339e-01    -8.082747e-01     1.382882e-02     2.316294e-02
 3          5.931251e-01    -8.051496e-01     6.319632e-05     2.257559e-04
```

```
 4          5.930703e-01     -8.051507e-01      4.412852e-08     -7.691604e-08
Solutions         0.59307         -0.805151

initial guess: x, y ? -1.0 0.5                          ……  初期値 (x,y)=(-1.0, 0.5) の入力

 k        x         y        f(x,y)    g(x,y)
 0         -1.000000e+00      5.000000e-01      2.500000e-01      2.500000e-01
 1         -8.518519e-01      5.462963e-01      2.409127e-02     -1.795011e-02
 2         -8.430871e-01      5.379139e-01      1.471392e-04     -3.221282e-04
 3         -8.430703e-01      5.378034e-01      2.364374e-08     -8.205114e-08
Solutions        -0.84307          0.537803

initial guess: x, y ? -1.0 -0.5                         ……  初期値 (x,y)=(-1.0, -0.5) の入力

 k        x         y        f(x,y)    g(x,y)
 0         -1.000000e+00     -5.000000e-01      2.500000e-01      2.500000e-01
 1         -8.518519e-01     -5.462963e-01      2.409127e-02     -1.795011e-02
 2         -8.430871e-01     -5.379139e-01      1.471392e-04     -3.221282e-04
 3         -8.430703e-01     -5.378034e-01      2.364374e-08     -8.205114e-08
Solutions        -0.84307         -0.537803

initial guess: x, y ? ^Z (controlとZを同時に押す)  ↲(Enter Keyを押す)
                                                        ……  入力終了コードの入力
------------------------おしまい-----------------------
```

参考文献

高倉葉子：数値計算の基礎―解法と誤差―, コロナ社 (2007)
森口繁一, 伊理正夫, 武市正人 編：Cによる算法痛論, 東京大学出版会 (2000)
Heath, Michael T.: Scientific Computing, An Introductory Survey, McGraw-Hill (2002)