6. 関数近似：補間と補外

6.1 ラグランジュ補間法

互いに異なる点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とそれらの点における関数値 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ が与えられているとする。これらの n 点を補間するたかだか n-1 次の補間多項式 $F_n(x)$ は，ラグランジュ基底関数 $L_k^{(n-1)}(x)$ を用いて

$$(1)\quad F_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)L_k^{(n-1)}(x)$$

$$L_k^{(n-1)}(x_l)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

と書ける。これは，n 次の多項式

$$\pi_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

を導入すると

$$\pi_n'(x_k)=(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$$

であるので，(1)式は $\pi_n(x)$ がくくり出された形でつぎのようにも表すことができる。

$$(2)\quad F_n(x)=\pi_n(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{(x-x_k)\pi_n'(x_k)}$$

【アルゴリズム 6.1.1】

(1)式に基づくもの：

$(x_1, f_1), (x_2, f_2), \cdots, (x_n, f_n)$:=与えられた n 点のデータ

```
fx=0
for k=1 to n
    p=q=1
    for i=1 to n
        if i≠k then
            p:=p*(x-x_i)
            q:=q*(x_k-x_i)
        end
        fx:=fx+f_k*p/q
    end
end
```

【プログラム 6.1.1】

```
1 /* Lagrangian interpolation                */
2 /*    given data:  n values of (x, f)       */
3 /*                 interpolation point xx   */
4 /*    interpolated value f(xx) is computed */
5
6 #include <stdio.h>
7
8 #define NMAX 20
9
```

```
10 int n;
11 float x[NMAX], f[NMAX];
12
13 void main(void)
14 {
15     int i,k;
16     float xx,fx,p,q;
17                                                    /* read input data */
18     printf("Lagrangian interpolation\n");
19     printf("number of data n ? ");
20     scanf("%d",&n);
21     for(i=0;i<n;i++){
22             printf("x[%d], f[%d] ? ",i+1,i+1);
23             scanf("%g%g", &x[i], &f[i]);
24     }
25     printf("interpolation point xx ? ");
26     scanf("%g", &xx);
27                                                    /* interpolation */
28     fx=0;
29     for(k=0;k<n;k++){
30          p=1; q=1;
31          for(i=0;i<n;i++)
32                   if(i!=k){
33                            p *= xx-x[i];
34                            q *= x[k]-x[i];
35                   }
36          fx += f[k]*p/q;
37     }
38     printf("\ninterpolated value at x=%g:\n",xx);
39     printf("f(%g)=%g\n",xx,fx);
40 }
```

【アルゴリズム 6.1.2】

(2) 式に基づくもの：

$(x_1, f_1), (x_2, f_2), \cdots, (x_n, f_n)$:=与えられた n 点のデータ

```
for k=1 to n
     q=1
     for i=1 to n
          if i≠k then
               q:=q(x_k-x_i)
          d_k:=q
     end
end

p=1, sum=0
for k=1 to n
     p :=p(x-x_k)
     σ:=σ+f_k/((x-x_k)d_k)
end
fx:=pσ
```

【プログラム6.1.2】

```
 1 /* Lagrangian interpolation                */
 2 /*    given data:  n values of (x, f)      */
 3 /*                 interpolation point xx  */
 4 /*    interpolated value f(xx) is computed */
 5
 6 #include <stdio.h>
 7
 8 #define NMAX 20
 9
10 int n;
11 float x[NMAX], f[NMAX];
12
13 void main(void)
14 {
15     int i,k;
16     float xx,fx,p,q,sum,pd[NMAX];
17
18     printf("Lagrangian interpolation\n");
19     printf("number of data n ? ");
20     scanf("%d",&n);
21     for(i=0;i<n;i++){
22             printf("x[%d], f[%d] ? ",i+1,i+1);
23             scanf("%g%g", &x[i], &f[i]);
24     }
25     printf("interpolation point xx ? ");
26     scanf("%g", &xx);
27                                                     /* d[k] */
28     for(k=0;k<n;k++){
29         q=1;
30         for(i=0;i<n;i++)
31             if(i!=k) q *=x[k]-x[i];
32         pd[k]=q;
33     }
34                                                     /* interpolation */
35     p=1; sum=0;
36     for(k=0;k<n;k++){
37         p   *= xx-x[k];
38         sum += f[k]/((xx-x[k])*pd[k]);
39     }
40     fx=p*sum;
41     printf("\ninterpolated value at x=%g:\n",xx);
42     printf("f(%g)=%g\n",xx,fx);
43 }
```

【問題】

水の動粘性係数νは，常温の範囲では以下のとおりである。

T [℃]	ν [m^2/s]
10.0	1.30700E-06
15.0	1.13900E-06
20.0	1.00400E-06
25.0	8.92800E-07
30.0	8.00800E-07

ラグランジュ補間により，水温 18.2℃のときの動粘性係数を求めよ。

【実行例】

プログラム 6.1.1，プログラム 6.1.2 とも実行結果は以下のようになる。

```
-------------------------実行開始-----------------------
Lagrangian interpolation
number of data n ? 5
x[1], f[1] ? 10.0 1.307e-6
x[2], f[2] ? 15.0 1.139e-6
x[3], f[3] ? 20.0 1.004e-6
x[4], f[4] ? 25.0 8.928e-7
x[5], f[5] ? 30.0 8.008e-7
interpolation point xx ? 18.2

interpolated value at x=18.2:
f(18.2)=1.04948e-06
-------------------------おしまい-----------------------
```

6.2 スプライン補間法

互いに異なる点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ とそれらの点における関数値 $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1), \cdots, y_n=f(x_n)$ が与えられているとする。小区間$[x_{i-1}, x_i]$ごとに 3 次エルミート補間関数（1 階導関数の連続性を保証）$s_i(x)$ を用いると，

$$s_i(x)=\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2\left(\left(3y_{i-1}+h_iy'_{i-1}\right)+\frac{x-x_i}{h_i}\left(2y_{i-1}+h_iy'_{i-1}\right)\right)+\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)^2\left(\left(3y_i+h_iy'_i\right)-\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\left(2y_i-h_iy'_i\right)\right)$$

$$h_i=x_i-x_{i-1}$$

となる。更に隣接する小区間上の補間関数と 2 階導関数まで連続に接続する条件 $s_i''(x_i)=s_{i+1}''(x_i)$ を課すると，y_i' に関する方程式

$$\frac{1}{h_i}y'_{i-1}+\left(\frac{2}{h_i}+\frac{2}{h_{i+1}}\right)y'_i+\frac{1}{h_{i+1}}y'_{i+1}=-\frac{3}{h_i^{\,2}}y_{i-1}+\left(\frac{3}{h_i^{\,2}}-\frac{3}{h_{i+1}^{\,2}}\right)y_i+\frac{3}{h_{i+1}^{\,2}}y_{i+1},\qquad i=1,2,\cdots,n-1$$

を得る。端点 $x=x_0, x_n$ においては，2 階微係数が零となる条件を課すると，

$$\frac{2}{h_1}y_0'+\frac{1}{h_1}y_1'=-\frac{3}{h_1^{\,2}}y_0+\frac{3}{h_1^{\,2}}y_1$$

$$\frac{1}{h_n}y'_{n-1}+\frac{2}{h_n}y'_n=-\frac{3}{h_n^{\,2}}y_{n-1}+\frac{3}{h_n^{\,2}}y_n$$

となる。これらは，y_i' に関する三項方程式となっているので，アルゴリズム 4.3.1 により y_i' は求まる。点 x がどの区間にあるかを判定すれば，x におけるスプライン補間関数 $s_i(x)$ の値は定まる。

【プログラム 6.2.1】

```
 1 /* Spline Interpolation                    */
 2 /*    given data:  number of intervals: n  */
```

```
/*                x_i, y_i, i=0,1,...,n   */
/*    interpolated value f(xx) is computed */
/*                for x_0 <= xx <= x_n    */

#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define NMAX 50

float yy(float xx,float x0,float x1,float y0,float y1,float dy0,float dy1)
{
    float z0,z1;

    z0=(xx-x0)/(x1-x0);  z1=(xx-x1)/(x0-x1);
    return(z1*z1*((3*y0-(x0-x1)*dy0)-z1*(2*y0-(x0-x1)*dy0))
          +z0*z0*((3*y1-(x1-x0)*dy1)-z0*(2*y1-(x1-x0)*dy1)));
}

void main(void)
{
    int n,i,j,m;
    float x[NMAX],y[NMAX],h[NMAX],a[NMAX],b[NMAX],c[NMAX],d[NMAX];
    float x0,dx,xx,yyj;
                                                    /* read input data */
    printf("Spline interpolation\n");
    printf("number of intervals n ? ");
    scanf("%d",&n);
    for(i=0;i<=n;i++){
            printf("x[%d], y[%d] ? ",i,i);
            scanf("%g%g", &x[i], &y[i]);
    }
                                            /* set coefficients of three-term equations */
    for(i=1;i<=n;i++)
        h[i]=x[i]-x[i-1];
    for(i=1;i<n;i++){
        a[i]=2/h[i]+2/h[i+1];
        b[i]=1/h[i+1];
        c[i]=1/h[i];
        d[i]=3/(h[i]*h[i])*(y[i]-y[i-1])
                +3/(h[i+1]*h[i+1])*(y[i+1]-y[i]);
    }
                                                /* end-point condition at x[0] */
    a[0]=2/h[1]; b[0]=1/h[1]; c[0]=0; d[0]=3/(h[1]*h[1])*(y[1]-y[0]);  /* y"=0 */
                                                /* end-point condition at x[n] */
    a[n]=2/h[n]; b[n]=0; c[n]=1/h[n]; d[n]=3/(h[n]*h[n])*(y[n]-y[n-1]); /* y"=0 */
/*    a[n]=1; b[n]=0; c[n]=0; d[n]=(y[n]-y[n-1])/h[n];  */
                                                    /* solve three-term equations */
                                                            /* forward */
    b[0] /= a[0];
    d[0] /= a[0];
    for(i=1;i<=n;i++){
```

```
54          a[i] -= c[i]*b[i-1];
55          d[i] -= c[i]*d[i-1];
56          d[i] /= a[i];
57          b[i] /= a[i];
58      }
59                                                          /* backward */
60      for(i=n-1;i>=0;i--)
61          d[i] -=b[i]*d[i+1];
62                                                      /* interpolated values */
63      printf("initial value and interval of x for interpolated results, x0, dx ? ");
64      scanf("%g%g", &x0,&dx);
65      printf("\n\tx\t  interpolation\n");
66      m=(int)floor((x[n]-x0)/dx + 0.5);
67      i=1;                        /* initial set for interval counter */
68      for(j=0;j<=m;j++){
69          xx=x0+j*dx;
70  label0:if(xx<x[i] || i==n){
71              yyj= yy(xx,x[i-1],x[i],y[i-1],y[i],d[i-1],d[i]);
72              printf("%15.6e %15.6e\n", xx, yyj);
73              if(xx>=(x[n]+0.1*dx) && i==n) break;
74          }else{
75              i++;
76              goto label0;
77          }
78      }
79 }
```

【問題】

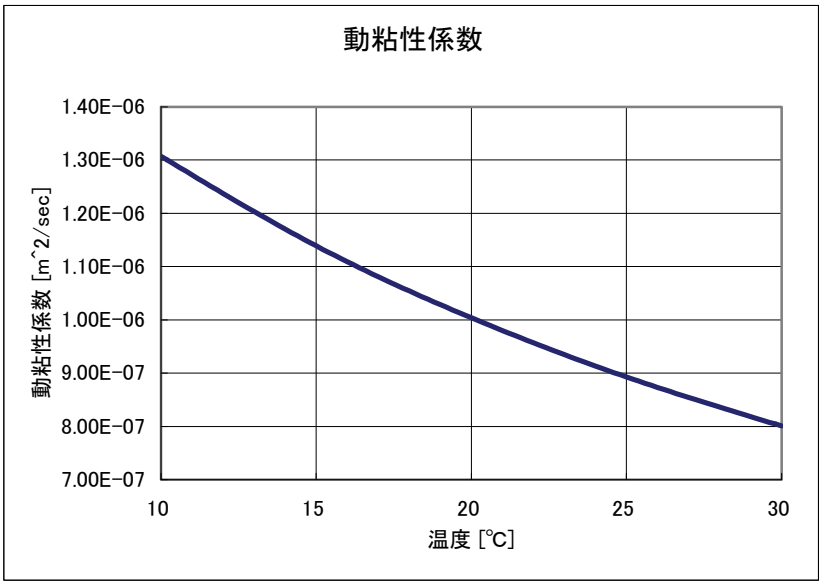
水の動粘性係数νの常温での温度依存性は 6.1 節「ラグランジュ補間法」の問題で記したとおりである。スプライン補間により，水温が 10～30[℃]のときの動粘性係数を求め，グラフ表示せよ。

【実行例】

```
------------------------実行開始-----------------------
Spline interpolation
number of intervals n ? 4                  ……  nは小区間数であることに注意
x[0], y[0] ? 10.0 1.307e-6                       （データ点数はn+1）
x[1], y[1] ? 15.0 1.139e-6
x[2], y[2] ? 20.0 1.004e-6
x[3], y[3] ? 25.0 8.928e-7
x[4], y[4] ? 30.0 8.008e-7
initial value and interval of x for interpolated results, x0, dx ? 10.0 0.2
                                           ……  初期値10，増分0.2のxの値に対する補間値を求める
        x          interpolation
   1.000000e+01    1.307000e-06
   1.020000e+01    1.299981e-06
   1.040000e+01    1.292965e-06
   1.060000e+01    1.285955e-06
   1.080000e+01    1.278954e-06
   1.100000e+01    1.271963e-06
   1.120000e+01    1.264988e-06
```

```
    1.140000e+01      1.258029e-06
    1.160000e+01      1.251091e-06
    1.180000e+01      1.244176e-06
    1.200000e+01      1.237286e-06
          :                 :
          :                 :
    2.900000e+01      8.184259e-07
    2.920000e+01      8.148914e-07
    2.940000e+01      8.113631e-07
    2.960000e+01      8.078395e-07
    2.980000e+01      8.043190e-07
    3.000000e+01      8.008000e-07
-------------------------おしまい-----------------------
```

動粘性係数の温度依存性はつぎのグラフに示される。



参考文献

高倉葉子：数値計算の基礎―解法と誤差―，コロナ社（2007）
森口繁一，伊理正夫，武市正人 編：Cによる算法痛論，東京大学出版会（2000）
Heath, Michael T.: Scientific Computing, An Introductory Survey, McGraw-Hill (2002)