

濡れた蓄熱器の熱音響理論

富永 昭

目次

1. はじめに	5
1.1 流体力学的議論と熱力学的議論の架け橋.....	7
1.2 エントロピー生成密度と熱力学第二法則.....	9
1.3 エントロピー生成最小の法則.....	11
2. エントロピー変動	13
2.1 濡れた蓄熱器のモデル	13
2.2 エントロピーの準静的変化	14
2.2.1 気液二相平衡と理想気体近似のモル濃度.....	15
2.2.2 準静的等温過程.....	16
2.2.3 準静的等圧過程：対流項	18
2.2.4 準静的等温過程と準静的等圧過程の和	19
2.3 拡散過程を考慮したエントロピー変動	20
2.3.1 乾いた蓄熱器のエントロピー変動.....	20
2.3.2 濡れた蓄熱器のエントロピー変動.....	22
3. 仕事流密度と仕事源.....	25
3.1 仕事流密度	25
3.2 仕事源	26
3.3 熱音響原動機の温度勾配の下限	30
4. エントロピー流密度とエントロピー生成密度.....	32
4.1 熱音響ヒートポンプの温度勾配の上限	34
4.2 濡れた蓄熱器の質量流密度.....	37
4.3 エントロピー生成密度	38
5. エントロピー生成最小の法則	42
5.1 熱音響ヒートポンプの安定性.....	44
5.2 安定な熱音響原動機の温度勾配と振幅	46
5.3 安定な熱音響熱機関の必要条件	47
5.4 安定な熱音響熱機関の位相差.....	49
5.4.1 乾いた蓄熱器の位相差の範囲.....	50
5.4.2 濡れた蓄熱器の位相差の範囲.....	52
[参考]	54

熱音響現象は管内流体の振動運動に伴う熱力学現象です。熱音響理論では流体の振動運動を振幅や周波数が時刻に依らない周期的定常状態に限定する。乱流や衝撃波は熱音響理論の対象外です。このために熱音響理論では熱力学的にも定常状態に限定する。仕事流密度 \tilde{I} とエントロピー流密度 \tilde{S} とエントロピー生成密度 σ は振幅と振動モード（角周波数 ω 、音響インピーダンス Z 、位相差 θ など）とに依存する。

乾いた蓄熱器の熱音響理論を濡れた蓄熱器の熱音響理論へと拡張する。

流体力学で馴染みのラグランジュ微分に着目し、振動運動する流体要素のエントロピーのラグランジュ微分を線形近似で議論する。まず、混合気体を理想気体とみなしてエントロピーの準静的変化を議論する。次に、エントロピーの準静的変化から拡散現象を含むエントロピー変動へと直感的に拡張する。乾いた蓄熱器では、熱容量の大きい管壁が熱浴となり、エントロピーの流路断面内での拡散が生じる。濡れた蓄熱器の管壁は飽和蒸気の蒸発凝縮に対応して粒子浴の役割をも担う。このために流路断面内では、エントロピーの拡散だけでなく、非凝縮性気体と飽和蒸気との相互拡散をも考慮する必要がある。

その後の粗い議論では、簡単のために、飽和蒸気分子の拡散に関わる拡散係数はエントロピー拡散に対応する熱拡散係数 α と値が等しいと仮定する。

仕事流密度 \tilde{I} の湧き出し $W \equiv \nabla \tilde{I}$ は仕事源です。熱音響原動機 ($W > 0$) の温度勾配の下限 $(\nabla T_m)_W > 0$ は、振動モードに依存するが、振幅に依らない。熱音響ヒートポンプ ($\tilde{S} \nabla T_m \geq 0$) の温度勾配の上限 $(\nabla T_m)_{\tilde{S}} > 0$ は振動モードと振幅とに依存する。

熱音響ヒートポンプの温度勾配の上限 $(\nabla T_m)_{\tilde{S}} > 0$ と熱音響原動機 ($W > 0$) の温度勾配の下限 $(\nabla T_m)_W > 0$ とは乾いた蓄熱器よりも濡れた蓄熱器のほうが小さい。このために、熱音響ヒートポンプにとっては乾いた蓄熱器が好ましいが、熱音響原動機にとっては濡れた蓄熱器が好ましい。

エントロピー生成密度 σ はエントロピー流密度 \tilde{S} の湧き出し $\nabla \tilde{S}$ に等しい。熱音響現象では $\sigma = \sigma_A + \sigma_k + \sigma_D + \sigma_\theta$ です。 $\sigma_A \geq 0$ は温度勾配 ∇T_m に依らないが、位相差 θ に依存する σ_θ は ∇T_m に比例し、 $\sigma_k \geq 0$ と $\sigma_D \geq 0$ とは ∇T_m の2乗に比例する。つまり σ は ∇T_m

の2次式です。このために、エントロピー生成密度 σ が最小値 σ_{\min} をとる温度勾配 $(\nabla T_m)_\sigma$ が存在する。熱力学第二法則 ($\sigma \geq 0$) により $\sigma_{\min} \geq 0$ です。

$(\nabla T_m)_\sigma$ も振動モードと振幅とに依存する。位相差 θ の範囲を制限して $\sigma_\theta < 0$ とすると $(\nabla T_m)_\sigma > 0$ です。

エントロピー生成最小の法則に基づく熱音響熱機関の安定性に関する議論については、「熱音響理論：私の理解」改訂第4版¹を改良した。熱音響熱機関には熱音響ヒートポンプと熱音響原動機とがある。安定な熱音響熱機関の必要条件の一つは $\sigma_\theta < 0$ すなわち $(\nabla T_m)_\sigma > 0$ です。

熱音響ヒートポンプは強制振動です。 $\nabla T_m < (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ を満足する全温度勾配で安定な熱音響ヒートポンプでは $(\nabla T_m)_{\tilde{S}} < (\nabla T_m)_\sigma$ も必要です。

熱音響原動機は自励振動です。安定な熱音響原動機の温度勾配は、エントロピー生成最小の法則により、 $(\nabla T_m)_\sigma$ に等しい。安定な熱音響原動機では $(\nabla T_m)_\sigma > (\nabla T_m)_W$ も必要です。

振動モードが同じなら、安定な熱音響原動機の温度勾配 $(\nabla T_m)_\sigma$ には $W > 0$ に対応する下限 $(\nabla T_m)_W$ と熱力学第二法則に対応する上限とがある。安定な熱音響原動機の温度勾配 $(\nabla T_m)_\sigma$ は振幅の増加関数なので、 $(\nabla T_m)_\sigma$ の下限と上限に対応して、振幅にも下限と上限が存在する。安定な熱音響原動機のエントロピー流密度の大きさ $-\tilde{S} > 0$ は振幅の増加関数なので、振幅の下限と上限に対応して、エントロピー流密度の大きさ $-\tilde{S} > 0$ にも下限と上限が存在する。

安定な熱音響原動機ではエントロピー流密度の大きさ $-\tilde{S} > 0$ が熱力学第二法則に対応する上限を越えると別の振動モードへとモード転移する。

振動モードが同じなら、安定な熱音響原動機として動作する可能性のある位相差 θ の範囲は乾いた蓄熱器より濡れた蓄熱器のほうが広い。

¹ <http://www.ed.u-tokai.ac.jp/thermoacoustic/texts.html>

1. はじめに

熱音響現象では管内流体が振動運動する。その振幅や周波数が時刻に依らない周期的定常状態に着目する。周期的定常状態は、何周期にも渡って繰り返される再現性の良い状態なので、実験結果の再現性が良い。以下の議論の対象は熱音響現象の周期的定常状態に限定する。

熱音響現象を理解するには流体力学的側面と熱力学的側面との両面からの理解が必要です。流体力学的議論では管内流体の振動運動の様子を議論する。周期的定常状態に限定したので、乱流や衝撃波は対象外です。熱力学的議論では管内流体の運動に伴う仕事流密度 \tilde{I} とエントロピー流密度 \tilde{S} を議論する。いずれも周期的定常状態に対応した定常流密度です。このために仕事源 $W \equiv \nabla \tilde{I}$ もエントロピー生成密度 $\sigma = \nabla \tilde{S}$ も時刻に依らない。

流体力学と熱力学の歴史を簡単に復習しておこう。

ギリシャ時代からの静力学 (mechanics) は17世紀に主に質点の運動を議論する動力学 (dynamics) へと発展し、ニュートン (1642-1727年) によりプリンキピアに纏められた (1687年)。ニュートン力学の基本法則は運動量保存則です。

連続体を対象とする力学の一つとして18世紀に始まった流体力学の対象は理想流体の運動です。18世紀の流体力学は、理想流体という仮想的流体を扱うにも関わらず、二つの基本的視点を遺した。後の場の理論に貢献したオイラー (1707-83年) の視点とラグランジュ (1736-1813年) の視点の二つです。後者の視点による時間変化の数式表現はラグランジュ微分と呼ばれている。

カルノー (1796-1832年) は熱機関を対象とした熱力学 (thermodynamics) を19世紀初頭に創始した。この熱力学は非平衡系の熱力学です。当時の熱機関の基本概念は仕事 (流) と熱 (流) です。熱 (流) をエネルギー (流) の仲間と認識し、エネルギー (流) 概念が拡張された。熱機関の基本概念は仕事 (流) と熱 (流) との相互変換となり、19世紀前半に熱力学第一法則 (エネルギーは不生不滅) が確立された。

19世紀の流体力学はその対象を理想流体から粘性流体に変更したことで自然科学に近づいた。管内音波に関わるキルヒホッフ理論 (1868年) は、局所平衡の仮定の

もとに、粘性流体に熱力学第一法則を考慮することで、一様温度の管の中の流体の振動運動を議論することに成功した。

非平衡系の熱力学にエントロピー流密度 \tilde{S} を導入したクラウジウス（1822-88年）は、仕事流密度 \tilde{I} と温度 T の面を通り抜ける熱流密度 $\tilde{Q} \equiv T\tilde{S}$ との相違を明確にただけでなく、熱流と仕事流の間で生じるエネルギー（流）変換の非対称性を定常状態の熱力学第二法則（クラウジウスの不等式： $\nabla\tilde{S} \geq 0$ ）に定式化した（1854年）。定常状態のエントロピー生成密度 σ は $\nabla\tilde{S}$ に等しい。クラウジウスは示量性状態量としてのエントロピー S も導入した（1865年）。密度を ρ とすると単位体積当たりのエントロピーは ρS であり、エントロピー流密度 \tilde{S} やエントロピー生成密度 σ との関係は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \nabla\tilde{S} = \sigma$$

です。このようにエントロピー概念はエントロピー流 \tilde{S} とエントロピー生成密度 σ と単位体積当たりのエントロピー ρS の三つで一組の概念です。エントロピーはクラウジウスによる造語で、「変換」を意味するギリシア語：τροπή（トロペー）に由来している。

熱力学第二法則は $\sigma \geq 0$ です。定常状態では単位体積当たりのエントロピー ρS は時刻に依らないので、 $\nabla\tilde{S} = \sigma$ です。周期的定常状態では単位体積当たりのエントロピー S の時間平均 S_m は時刻に依らないので、 $\nabla\langle\tilde{S}\rangle_t = \langle\sigma\rangle_t$ です。周期的定常状態だけに着目する熱音響理論では $\langle\tilde{S}\rangle_t$ をエントロピー流密度 \tilde{S} とし、 $\langle\sigma\rangle_t$ をエントロピー生成密度 σ とするので $\nabla\tilde{S} = \sigma$ です。

非平衡系の熱力学から平衡系の熱力学が派生した。示量性状態量としてのエントロピーが認識された19世紀末に平衡系の熱力学を建設したのはギブズ（1839-1903年）です。平衡系の熱力学は示量性状態量と示強性状態量だけで記述され、エントロピー流 \tilde{S} や仕事流 \tilde{I} のような移動量とエントロピー生成 σ のような生成量を扱わない。静力学（mechanics）と動力学（dynamics）の使い分けと対比するなら、平衡系の熱力学はthermomechanicsです。

平衡系の熱力学の対象は準静的変化だけに制限される。流体力学は局所平衡の仮定のもとに成り立つ。ラグランジュ微分を議論する際に、準静的変化だけに制限するなら、平衡系の熱力学が役立つ。

管内流体の運動については管壁の温度が一様だったキルヒホッフ理論を非一様の場合に拡張したのがクラマース（1894-1952年）の拡張キルヒホッフ理論（1949年）です。拡張キルヒホッフ理論により熱音響現象の流体力学的議論が可能となった。キルヒホッフ理論も拡張キルヒホッフ理論も線型近似の流体力学的理論です。

プリゴジン（1917-2003年）らは20世紀後半にエントロピー生成最小の法則を使って非平衡状態の熱力学的安定性を議論した。

1.1 流体力学的議論と熱力学的議論の架け橋

熱音響理論を思い出そう。流体要素の管軸方向の変位を ξ 、圧力を p 、単位質量あたりのエントロピーを S とすると、流体要素の振動運動は $\xi - p - S$ 空間の張る3次元空間内の楕円軌道（図1.1）で表現できる。

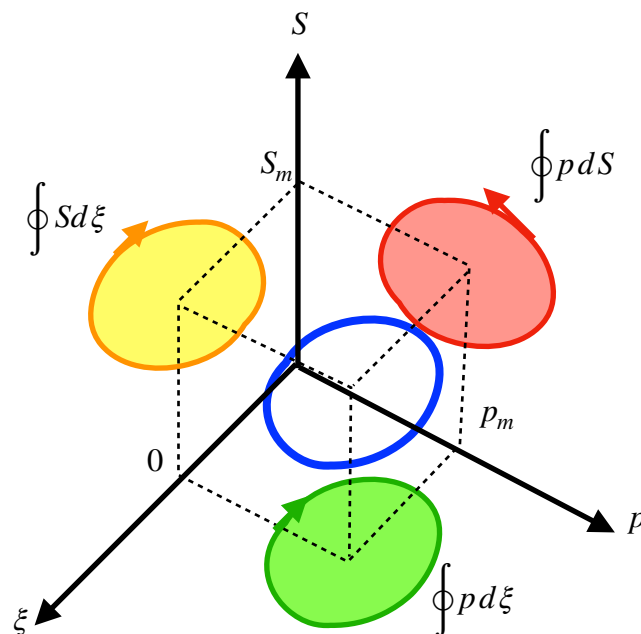


図1.1 $\xi - p - S$ 空間の張る3次元空間：単位質量の流体の振動運動の軌道は中央の楕円。仕事流は $\xi - p$ 平面に射影した楕円の面積に比例し、エントロピー流は $\xi - S$ 平面に射影した楕円の面積に比例する。熱から仕事へのエネルギー変換は $S - p$ 平面に射影した楕円の面積に比例する。矢印の向きは熱音響原動機の場合。熱音響ヒートポンプでは逆向き。

熱力学的議論のためには、仕事流、エントロピー流、熱（流）から仕事（流）へのエネルギー変換が必要です。いずれも非平衡系の熱力学概念です。

一周期あたりの仕事流密度（単位断面積を通過する仕事流）は $\xi-p$ 平面に射影した楕円の面積

$$\oint p d\xi$$

に等しい。このことに着目したのはジェームズ・ワット（1736-1819年）とされる。

一周期あたりのエントロピー流密度（単位断面積を通過するエントロピー流）は

$$\rho_m \oint S d\xi$$

です。周回積分は $\xi-S$ 平面に射影した楕円の面積です。

単位質量の流体が行う一周期あたりの熱（流）から仕事（流）へのエネルギー変換は $T-S$ 線図の囲む面積

$$\oint T dS$$

に等しい。線型近似では

$$\oint T dS \simeq \oint \left[\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S p + \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_p S \right] dS = \oint \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S p dS$$

なので、1周期あたりの熱（流）から仕事（流）へのエネルギー変換密度は

$$\rho_m \oint T dS \simeq \rho_m \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \oint p dS$$

です。この右辺の周回積分は $S-p$ 平面に射影した楕円の面積に等しい。

従って、エントロピー流密度やエネルギー変換密度を議論するには、エントロピー変動 S を変位 ξ や圧力変動 p と結びつける必要がある。同じことですが、熱力学的議論を流体力学的議論と結びつけるには、流体のエントロピー変動を流体力学的に議論する必要があります。エントロピー変動の流体力学的議論の創始者は不明です。ランダウとリフシッツの共著『連続体の物理学』（第二版、1954）には熱輸送の一般式が登場する。熱伝導を考慮したエネルギー保存則の一つの表現です。

第2章では、熱輸送の一般式を頭わには使わずに、流体の振動運動に伴うエントロピー変動、すなわち、振動運動する流体要素のエントロピーのラグランジュ微分 dS/dt を議論する。平衡状態の熱力学を使ってエントロピーの準静的変化を議論する

ことから始めて、不可逆過程を含むエントロピー変動を議論するために、エントロピーの準静的変化からのずれを考慮する。準静的変化からのずれの原因は管壁の存在と流路断面内での拡散にある。熱容量の大きい管壁が熱浴となるので、管壁から離れると、エントロピーの流路断面内での拡散が生じる。濡れている管壁は飽和蒸気の粒子浴となるので、異種気体分子の流路断面内での相互拡散も生じる。粘性のために、管内流体の管軸方向の変位 ξ は一様ではない。この非一様性は運動量の流路断面内での拡散の表れです。

流路断面内での拡散過程の詳細な議論を避けることで、ベッセル関数とその取扱²に目を奪われなくなり、熱音響理論の概念的理解に役立つだろう。

1.2 エントロピー生成密度と熱力学第二法則

流体の振動運動が定常な場合（周期的定常状態）に限定したので、管軸方向の仕事流密度 \tilde{I} やエントロピー流密度 \tilde{S} も定常です。

仕事流密度 \tilde{I} が判ると仕事源

$$W \equiv \nabla \tilde{I}$$

が判り、エントロピー流密度 \tilde{S} が判ると定常状態のエントロピー生成密度

$$\sigma = \nabla \tilde{S}$$

が判る。エントロピー生成密度 σ が判ると、熱力学第二法則 $\sigma \geq 0$ やエントロピー生成最小の法則を使う議論が可能となる。

蓄熱器などの軸座標の正方向については、時間平均温度 T_m の勾配 ∇T_m が正になるように選ぶ： $\nabla T_m \geq 0$ 。

仕事流密度 \tilde{I} とエントロピー流密度 \tilde{S} を使うと、時間平均温度 T_m の断面を通過するエネルギー流密度は $\tilde{I} + T_m \tilde{S}$ です。熱力学第一法則（エネルギーは不生不滅）は

$$\nabla (\tilde{I} + T_m \tilde{S}) = 0$$

すなわち

$$W + T_m \sigma + \tilde{S} \nabla T_m = 0$$

です。したがって、エントロピー生成密度は

² 例えば前掲「熱音響理論：私の理解」改訂第4版の付録：第一種ベッセル関数 J_n とその管内音波への応用 <http://www.ed.u-tokai.ac.jp/thermoacoustic/texts.html>

$$\sigma = -\frac{1}{T_m} (W + \tilde{S} \nabla T_m) \quad (1.1)$$

です。Wと $\tilde{S} \nabla T_m$ とは次元が同じです。熱力学第二法則 ($\sigma \geq 0$) は

$$W + \tilde{S} \nabla T_m \leq 0 \quad (1.2)$$

です。

Wと $\tilde{S} \nabla T_m$ の張るW- $\tilde{S} \nabla T_m$ 平面を想定する (図1.2) と、平衡状態は原点 ($W = 0$ かつ $\tilde{S} \nabla T_m = 0$) に対応する。熱力学第二法則(1.2)の領域は実験可能なこの世です。熱力学第二法則に抵触する $W + \tilde{S} \nabla T_m > 0$ の領域は、実験不可能なあの世です。この意味で

$$W + \tilde{S} \nabla T_m = 0$$

はこの世とあの世の境界 (三途の川) の方程式です。カルノー機関もこの境界上にある。あの世は、妄想の対象となることがあるが、自然科学の対象ではない。

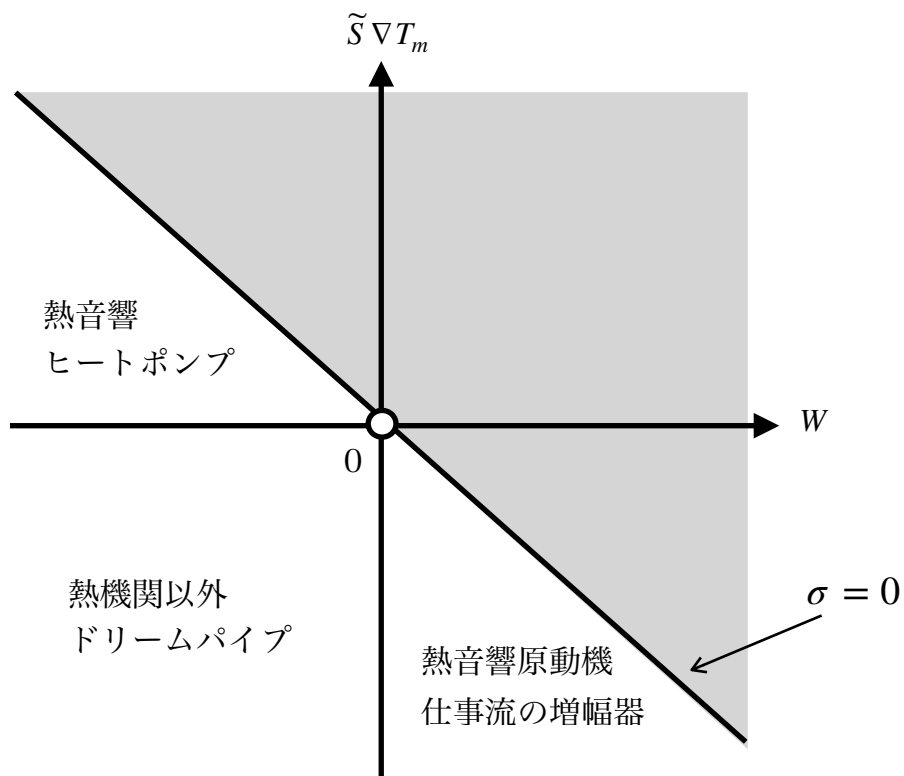


図1.2 定常状態の分類：灰色の領域は、エントロピー生成密度 σ が負なので、熱力学第二法則に抵触する。原点は平衡状態。原点を通る対角線上ではエントロピー生成密度がゼロなのでカルノー機関に対応する。

熱音響自励振動などの熱音響原動機や仕事流密度の増幅器などでは $W > 0$ なので、熱力学第二法則(1.2)によれば、第四象限 ($W > 0$ かつ $\tilde{S}\nabla T_m < 0$) の中の

$$0 < W \leq -\tilde{S}\nabla T_m$$

の領域です。熱音響ヒートポンプでは $\tilde{S}\nabla T_m > 0$ なので、熱力学第二法則(1.2)によれば、第二象限 ($W < 0$ かつ $\tilde{S}\nabla T_m > 0$) の中の

$$0 < \tilde{S}\nabla T_m \leq -W$$

の領域です。第三象限 ($W < 0$ かつ $\tilde{S}\nabla T_m < 0$) はドリームパイプです。

縦軸上 ($W = 0$) で $\tilde{S}\nabla T_m < 0$ の部分は、管内流体が静止している場合には軸方向熱伝導 (単純熱伝導) に対応し、管内流体が振動運動している場合にはドリームパイプと熱音響原動機との境界です。横軸上 ($\tilde{S}\nabla T_m = 0$) で $W < 0$ の部分は、一様温度 ($\nabla T_m = 0$) の場合には管内音波の減衰に対応するが、 $\nabla T_m \neq 0$ の場合にはドリームパイプと熱音響ヒートポンプとの境界 ($\tilde{S} = 0$) です。

1.3 エントロピー生成最小の法則

熱力学第一法則 (エネルギーは不生不滅) と熱力学第二法則 ($\sigma \geq 0$) をともに満足する定常状態が複数ある場合には σ が最小の定常状態だけが熱力学的に安定です。さらに、エントロピー生成 σ が減少する方向の現象は熱力学的に安定です。このような熱力学的安定性に関わる経験則がエントロピー生成最小の法則です。例えば平衡状態 ($\sigma = 0$) が熱力学的に安定なのは、エントロピー生成最小の法則の表れです。

除夜の鐘で馴染みの梵鐘の音はゆっくり減衰する、内部摩擦などによるエントロピー生成密度 σ は、梵鐘などの歪み振動の振幅が小さくなるにつれて減少し、最終的平衡状態 ($\sigma = 0$) に向かう。減衰振動はエントロピー生成が減少する方向なので安定です。

高温の物体と低温の物体とを接触させると、高温部から低温部へ向かうエントロピー流 \tilde{S} が生じる ($\tilde{S}\nabla T < 0$)。熱伝導によるエントロピー生成密度 σ は ∇T の2乗に比例するので温度差が小さくなるにつれてエントロピー生成密度 σ が減少する。熱伝導現象は σ が減少する現象なので安定です。最終的平衡状態 ($\sigma = 0$) はエントロピー生成がゼロなので安定です。

熱音響ヒートポンプのエントロピー流 \tilde{S} は、低温部から高温部へ向かう ($\tilde{S}\nabla T_m > 0$) ので、熱音響ヒートポンプは熱伝導現象 ($\tilde{S}\nabla T < 0$) とは異なり、エントロピー生成最小の法則に抵触するよう見える。

熱音響原動機のエントロピー流 \tilde{S} は、熱伝導現象と同じように、低温部から高温部へ向かう ($\tilde{S}\nabla T_m < 0$) ので、エントロピー生成最小の法則に反しないよう見えるが、自励振動である熱音響原動機の振幅は有限です。熱音響原動機は、この意味で梵鐘の減衰振動とは異なり、エントロピー生成最小の法則に抵触するよう見える。

熱音響現象のエントロピー生成密度 σ を調べると、位相差 θ に依存するエントロピー生成密度 σ_θ が存在する。位相差 θ の範囲を制限すると $\sigma_\theta < 0$ が実現し、エントロピー生成最小の法則の表れである安定な熱音響熱機関が可能になる。

熱音響熱機関の安定性については第5章で議論する。

2. エントロピー変動

2.1 濡れた蓄熱器のモデル

蓄熱器の幾何学的構造は乾いた蓄熱器と同様に蓮根モデル（細管の束）とする。濡れた蓄熱器の細管を満たすのは、（例えば空気などの）非凝縮性気体と（例えば水などの）飽和蒸気との混合気体です。ここで非凝縮性とは動作温度圧力領域では凝縮しないことを意味する。

蓄熱器内に非凝縮性気体が存在することは重要です。飽和蒸気だけだと、ヒートパイプに近く、高温部から低温部へ向かう蒸気の定常流と低温部から高温部へと逆流する液体の定常流とが主となる。非凝縮性気体が存在することで混合気体の定常な振動流が可能となる。ここで定常な振動流とは、振幅、周波数などが時刻に依らない振動流です。

飽和蒸気が存在を保証するには蓄熱器の内面が液体膜で覆われていることが必要です。この液体膜の役割は二つある。一つは、飽和蒸気が蒸発凝縮する際の粒子浴としての役割です。気相液相臨界点の近くを別にすれば、飽和蒸気の密度は液体の密度に比べて充分小さい（例えば1/1000程度）ので蓄熱器の内面を覆う液体膜は薄くて良い。二つ目は、剛体壁としての役割です。この液体膜が、蓄熱器の内壁に固着していて、混合気体が振動運動しても液体膜が動かないように充分薄いと仮定する。さらに、簡単のために、液体膜の熱膨張率と圧縮率はゼロとし、非凝縮性気体は蓄熱器の内面を覆う液体膜に溶け込まないとする。

蓄熱器内の混合気体は管の軸方向に振動運動する。流体要素の振動運動に伴い、その温度、エントロピー、圧力なども、それぞれ、時間平均温度 T_m 、時間平均 S_m 、時間平均圧力 p_m を中心として振動する。

温度のラグランジュ微分は、 T_m からのずれを T とすると、

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \nabla (T_m + T)$$

です。 u は流速です。対流項（あるいは移流項）と呼ばれる右辺第2項は

$$u \nabla (T_m + T) = u \nabla T_m + u \nabla T$$

です。振動量について二次の項 $u \nabla T$ を無視する線形近似では

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \nabla T_m$$

です。

S_m からのずれを S とすると、エントロピーのラグランジュ微分

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u \nabla (S_m + S)$$

の線形近似は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u \nabla S_m$$

です。

p_m からのずれを p とすると、圧力のラグランジュ微分

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \nabla (p_m + p)$$

の線形近似

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \nabla p_m$$

は、時間平均圧力 p_m は一様 ($\nabla p_m = 0$) との仮定により、

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

です。

キルヒホッフ理論や拡張キルヒホッフ理論と同様に、混合気体の時間平均温度 T_m 、時間平均エントロピー S_m 、時間平均圧力 p_m などは流路断面内で一様とする。

ラグランジュ微分で表現される変化は、一般的には、平衡状態の熱力学では記述できない。平衡状態の熱力学を使って記述できるのは準静的変化、つまり、時間変化が小さい極限だけです。熱音響現象では振動の角周波数 $\omega > 0$ がゼロの極限だけです。まず、準静的変化（極限 $\omega \rightarrow 0$ ）の場合を議論し、後に、準静的変化とは限らない（角周波数が有限の）場合へと拡張する。

2.2 エントロピーの準静的変化

混合気体のエントロピー S の準静的微小変化 dS は、圧力 p と温度 T とを独立変数に選ぶと、

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT$$

です。この右辺第一項は等温 ($dT = 0$) 的微小圧力変化 dp によるエントロピー変化です。

右辺第二項は等圧 ($dp = 0$) 的微小温度変化 dT によるエントロピー変化です。この dT を温度勾配 ∇T_m に沿う微小変位 $d\xi$ の顕れとみなすと

$$dT = \nabla T_m d\xi$$

なので、

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \nabla T_m d\xi = \nabla S_m d\xi$$

です。ここで

$$\nabla S_m = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \nabla T_m$$

はエントロピー勾配です。

こういうわけで、混合気体のエントロピー S の準静的変化は

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp + \nabla S_m d\xi$$

です。 $\nabla S_m d\xi$ は、流体要素がエントロピー勾配 ∇S_m に沿って微小変位 $d\xi$ だけ移動することによるエントロピー変化なので、エントロピー変化の対流項あるいは移流項と呼ばれている。

エントロピー S の準静的変化を $d\xi = 0$ の等温過程 ($dT = 0$) による

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp$$

と $d\xi \neq 0$ の等圧過程 ($dp = 0$) による対流項

$$\nabla S_m d\xi$$

とに分けて議論する。この際に、熱浴だけでなく、凝縮性気体の粒子浴である液体膜の存在を考慮する。

2.2.1 気液二相平衡と理想気体近似のモル濃度

濡れた蓄熱器を議論するには、飽和蒸気の凝縮や液体膜の蒸発を考慮する必要がある。

気液二相平衡では、体積とエントロピーは蒸気相のほうが液体相よりも大きい。飽和蒸気と凝縮液体の体積差とエントロピー差を、それぞれ、 $\Delta V_V > 0$ と $\Delta S_V > 0$ とする。蒸発凝縮の潜熱

$$L = T_m \Delta S_V > 0$$

は ΔV_V に依らない。測定値 L と T_m を使って $\Delta S_V > 0$ を評価することができる。

飽和蒸気圧 p_{mV} は時間平均温度 T_m だけの関数です。[温度]の次元をもつ Θ_V を導入し

$$\frac{1}{\Theta_V} \equiv \frac{1}{p_{mV}} \frac{dp_{mV}}{dT_m}$$

とする。飽和蒸気圧曲線の傾き dp_{mV}/dT_m についてはクラウジウス・クラペイロンの式³

$$\frac{dp_{mV}}{dT_m} = \frac{\Delta S_V}{\Delta V_V}$$

がある。この左辺と $\Delta S_V > 0$ とは実験により評価できるのでクラウジウス・クラペイロンの式を使うと $\Delta V_V > 0$ も評価できる。 Θ_V を使うと、クラウジウス・クラペイロンの式は、

$$\frac{p_{mV}}{\Theta_V} = \frac{\Delta S_V}{\Delta V_V}$$

です。

N モルの混合気体は N_V モルの飽和蒸気と N_G モルの非凝縮性気体とからなる：

$$N = N_V + N_G$$

凝縮性気体のモル濃度は

$$c_{mol} \equiv \frac{N_V}{N} = \frac{N_V}{N_V + N_G}$$

です。混合気体を理想気体とみなす理想気体近似 ($p_V \propto N_V$ かつ $p_G \propto N_G$) を使うと、凝縮性気体のモル濃度 c_{mol} は p_{mV}/p_m に等しい：

$$c_{mol} \equiv \frac{N_V}{N} \simeq \frac{p_{mV}}{p_m}$$

以下の議論では理想気体近似を使う。

2.2.2 準静的等温過程

N モルの混合気体は N_V モルの飽和蒸気と N_G モルの非凝縮性気体とからなるとのイメージにあわせて、準静的等温過程の議論では、示量性状態量は単位質量あたりではなくて単位モルあたりとする。最後に、単位モルあたりから単位質量あたりに戻すことで、流体力学的議論との整合性を図る。

³ クラウジウス・クラペイロンの式は、クラペイロンによる先駆的工作をクラウジウスが1850年論文で定式化したものとされる。ギブズ後の平衡系の熱力学では、相平衡では2相の化学ポテンシャル（ギブズの自由エネルギー）が等しいことの顕れです。クラペイロン・クラウジウスの式は近似式ではない。

準静的等温過程 ($dT = 0$) のエントロピー変化

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp$$

は、非凝縮性気体に関わる

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p_G}\right)_{T, N_G} dp_G + \left(\frac{\partial S}{\partial N_G}\right)_{T, p_G} dN_G$$

と飽和蒸気に関わる

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p_V}\right)_{T, N_V} dp_V + \left(\frac{\partial S}{\partial N_V}\right)_{T, p_V} dN_V$$

との和です。

しかし、準静的等温過程 ($dT = 0$) のエントロピー変化は

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp = \left(\frac{\partial S}{\partial p_G}\right)_{T, N_G} dp_G$$

だけです。なぜなら、凝縮性気体の粒子浴である液体膜は非凝縮性気体の粒子浴ではないので $dN_G = 0$ です。さらに、凝縮性気体の蒸気圧 p_V は温度だけの関数なので $dT = 0$ では $dp_V = 0$ であり、 $dp_V = 0$ は理想気体近似では $dN_V = 0$ を意味する。こういうわけで $dT = 0$ では dp_G だけが有限だからです。

平衡状態の熱力学の恒等式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p_G}\right)_{T, N_G} = - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p_G, N_G} = -\beta V$$

を使うと

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p_G}\right)_{T, N_G} = -\beta V_m$$

です。ここで β と V_m は、それぞれ、混合気体の熱膨張率とモル体積の時間平均です。

従って、準静的等温過程 ($dT = 0$) のエントロピー変化は

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp = -\beta V_m dp_G$$

です。

二相平衡の飽和蒸気圧 p_V は温度だけで決まるので、準静的等温過程 ($dT = 0$) では $dp_V = 0$ つまり $dp = dp_G$ です。このことを考慮すると、 $d\xi = 0$ の準静的等温過程 ($dT = 0$) のエントロピー変化は

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp = -\beta V_m dp \quad (2.1)$$

です。

ここまで示量性状態量は単位モルあたりとしてきた。ここで、単位モルあたりから単位質量あたりに変換する。この変換はモル体積 V_m を密度の逆数 $1/\rho_m$ に形式的に置き換えるだけでよい。 $d\xi = 0$ の準静的等温過程 ($dT = 0$) によるエントロピー変化(2.1)は、この変換により、

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp = -\frac{\beta}{\rho_m} dp \quad (2.2)$$

となる。

2.2.3 準静的等圧過程：対流項

準静的等圧過程 ($dp = 0$) のエントロピー変化は、対流項 $\nabla S_m d\xi$ です。

エントロピー勾配 ∇S_m は二つの項からなる。一つは凝縮性気体の蒸発凝縮と関わりの無い

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \nabla T_m d\xi = \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m d\xi$$

です。実際、乾いた蓄熱器のエントロピー勾配は

$$\frac{C_p}{T_m} \nabla T_m$$

だけです。

エントロピー勾配 ∇S_m の二つ目は凝縮性気体の蒸発凝縮によるエントロピー勾配

$$\Delta S_V \nabla c_{mol} = \frac{L}{T_m} \nabla c_{mol}$$

です。ここで、 ∇c_{mol} は凝縮性気体のモル濃度 c_{mol} の勾配です。乾いた蓄熱器では $\nabla c_{mol} = 0$ ですが、濡れた蓄熱器では $\nabla c_{mol} \neq 0$ です。

理想気体近似

$$c_{mol} \simeq \frac{p_{mV}}{p_m}$$

に注意すると、 $\nabla p_m = 0$ では

$$\nabla c_{mol} = \frac{\nabla p_{mV}}{p_m}$$

です。 ∇p_{mV} は飽和蒸気圧の勾配です。

$$\frac{1}{\Theta_V} \equiv \frac{1}{p_{mV}} \frac{dp_{mV}}{dT_m} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{\Theta_V} \equiv \frac{1}{p_{mV}} \frac{\nabla p_{mV}}{\nabla T_m}$$

を使うと、

$$\nabla c_{mol} = \frac{p_{mV}}{p_m} \frac{\nabla T_m}{\Theta_V} = c_{mol} \frac{\nabla T_m}{\Theta_V}$$

です。

従って、理想気体近似では

$$\Delta S_V \nabla c_{mol} = c_{mol} \frac{L}{\Theta_V} \frac{\nabla T_m}{T_m}$$

です。

濡れた蓄熱器のエントロピー勾配は、両者を併せて、

$$\nabla S_m = \left[C_p + c_{mol} \frac{L}{\Theta_V} \right] \frac{\nabla T_m}{T_m}$$

です。これは、温度勾配 ∇T_m に比例し、飽和蒸気のモル濃度 p_{mV}/p_m の増加関数です。

こういうわけで、準静的等圧過程 ($dp = 0$) でのエントロピー変化は

$$\nabla S_m d\xi = \left[C_p + c_{mol} \frac{L}{\Theta_V} \right] \frac{\nabla T_m}{T_m} d\xi \quad (2.3)$$

です。

(2.3) 中の比熱 C_p や潜熱 L は単位モルあたりあるいは単位質量あたりですが、流体力学的議論との整合性のために、以下では C_p や L は単位質量あたりとする。。

2.2.4 準静的等温過程と準静的等圧過程の和

混合気体のエントロピーのラグランジュ微分の線形近似は、準静的変化では、(2.2) と (2.3) との和です：

$$dS = -\frac{\beta}{\rho_m} dp + \left[C_p + c_{mol} \frac{L}{\Theta_V} \right] \frac{\nabla T_m}{T_m} d\xi \quad (2.4)$$

この右辺第一項は準静的等温過程 ($dT = 0$) の寄与です。右辺第二項は準静的等圧過程 ($dp = 0$) の寄与であり、流体要素が温度勾配 ∇T_m あるいはエントロピー勾配 ∇S_m に沿って移動する際のエントロピー変化なので、エントロピー変化の対流項 (あるいは移流項) です。

エントロピー変化の対流項には濡れた蓄熱器と乾いた蓄熱器との形式的相違が

$$c_{mol} \frac{L}{\Theta_V}$$

に表現されている。一般には

$$0 \leq c_{mol} < 1$$

で、乾いた蓄熱器では $c_{mol} = 0$ です。

2.3 拡散過程を考慮したエントロピー変動

時間平均 S_m と p_m と T_m とは流路断面内で一様です。

キルヒホッフ理論や拡張キルヒホッフ理論と同様に波長が管の内径に比べて充分長いとする長波長近似を行うと、圧力変動 $\partial p/\partial t$ は流路断面内で一様です。

角周波数 $\omega > 0$ が有限の場合のエントロピー変動 dS/dt を議論する。角周波数 ω が有限なので、準静的とは限らないし、エントロピー変動 dS/dt は流路断面内で一様とは限らない。管壁が熱浴となるので流路断面内でエントロピー拡散という不可逆過程が存在する。管壁を覆う薄い液体膜が粒子浴となるので、流路断面内で異種気体分子の相互拡散という不可逆過程も存在する。流体の変位 ξ も粘性のために流路断面内で一様ではないので、運動量拡散という不可逆過程も存在する。

2.3.1 乾いた蓄熱器のエントロピー変動

乾いた蓄熱器に関わる熱音響理論では、拡張キルヒホッフ理論と熱輸送の一般式を使う議論の結果、線形近似で、

$$\frac{dS}{dt} = -f_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} + h \frac{C_p}{T_m} \langle u \rangle_r \nabla T_m \quad (2.5)$$

ただし

$$h \equiv f_\alpha \frac{1 - f_\nu}{1 - \chi_\nu}$$

$$\chi_\nu \equiv \langle f_\nu \rangle_r$$

でした⁴。なお、(2.5)では理想気体近似を使っていない。

f_α は流路断面内でのエントロピー拡散の表れです。熱容量の大きい管壁という熱浴が存在するが、管壁から離れるにつれて準静的変化からずれる。管壁に近ければ準静的変化に近い。変化の速さが大きいと準静的変化からのずれが大きい。エントロピー変化の大きさと時間遅れとが管壁からの距離に依存する。このことが複素数 f_α に表現されている。流路断面内の位置に依存する f_α の実部は準静的変化の尺度です。管壁では $f_\alpha = 1$ です。同じことですが $1 - f_\alpha$ は準静的変化からのずれの尺度です。

粘性のために変位 ξ は流路断面内で一様ではない。変位 ξ の大きさと時間遅れとが管壁からの距離に依存する。このことが複素数 f_ν に表現されている：

⁴ 例えば拙著「熱音響理論：私の理解」改訂第4版の 3.2.3.2 エントロピー変動とその応用 <http://www.ed.u-tokai.ac.jp/thermoacoustic/texts.html>

$$\xi = \frac{1 - f_\nu}{1 - \chi_\nu} \langle \xi \rangle_r$$

これは流体力学のナビエ・ストークスの方程式の線型近似の結果です。 f_ν は流路断面内の位置に依存する。

f_α は0次の第一種ベッセル関数 J_0 を使うと、管の中心軸からの距離 r を内半径 r_0 で規格化した r/r_0 の関数

$$f_\alpha(r) = \frac{J_0\left(\lambda_\alpha \frac{r}{r_0}\right)}{J_0(\lambda_\alpha)}$$

であり、

$$f_\alpha(r_0) = 1$$

です。熱拡散係数 α を動粘性係数 ν に置き換えるたものが f_ν です。ここで

$$\lambda_\alpha \equiv (1 - i)\sqrt{\omega \tau_\alpha}$$

と

$$\lambda_\nu \equiv (1 - i)\sqrt{\omega \tau_\nu}$$

は複素数です。

$$\tau_\alpha \equiv \frac{r_0^2}{2\alpha}$$

は熱緩和時間です。 ν に対応する

$$\tau_\nu \equiv \frac{r_0^2}{2\nu}$$

は粘性緩和時間です。

ベッセル関数の性質を使うと

$$h \equiv f_\alpha \frac{1 - f_\nu}{1 - \chi_\nu} = \frac{f_\alpha - f_\nu}{(1 - \text{Pr})(1 - \chi_\nu)}$$

です。ここで $\text{Pr} \equiv \nu/\alpha$ はプラントル数と呼ばれる無次元量です。

(2.5)の右辺第一項は、平衡状態の熱力学の恒等式

$$\frac{-\beta}{\rho_m} = \left(\frac{\partial V_m}{\partial T_m} \right)_{p_m} = \frac{\partial^2 G_m}{\partial p_m \partial T_m} = \left(\frac{\partial S_m}{\partial p_m} \right)_{T_m}$$

に注意すると、圧力 p_m の変動 $\partial p/\partial t$ に応じたエントロピーの等温変化

$$\left(\frac{\partial S_m}{\partial p_m} \right)_{T_m} \frac{\partial p}{\partial t}$$

に f_α を乗じたものです。

(2.5)の右辺第二項は、乾いた蓄熱器 ($p_{mV} = 0$) のエントロピー勾配

$$\nabla S_m \equiv \left(\frac{\partial S_m}{\partial T_m} \right)_{p_m} \nabla T_m = \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m$$

に注意すると、 $u = \partial \xi / \partial t$ に応じたエントロピーの等圧変化 $\nabla S_m \partial \xi / \partial t$ に h を乗じたものです。

2.3.2 濡れた蓄熱器のエントロピー変動

線形近似のエントロピー変動が準静的変化からずれるのは流路断面内での拡散現象のためです。乾いた蓄熱器では流路断面内でのエントロピー拡散の表れ f_α だけだったが、濡れた蓄熱器では非凝縮性気体と飽和蒸気という異種気体分子の相互拡散の表れ f_δ が加わる。 δ は異種気体分子の相互拡散係数です。管壁の薄い液体膜という粒子浴のために、液膜の表面では $f_\delta = 1$ です。 f_δ の実部も準静的過程の尺度です。 $1 - f_\delta$ は異種気体分子の相互拡散による準静的過程からのずれの尺度です。

$d\xi = 0$ での振動圧力 dp によるエントロピー変動は、 $\nabla T_m = 0$ の準静的等温変化

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp = - \frac{\beta}{\rho_m} dp \quad (2.2)$$

からずれて、

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T \frac{\partial p}{\partial t} = - f_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.6)$$

です。なお(2.6)では

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \nabla (p_m + p)$$

に $\nabla p_m = 0$ と線形近似による

$$\frac{dp}{dt} \simeq \frac{\partial p}{\partial t}$$

とを使った。

$\nabla T_m d\xi \neq 0$ によるエントロピー変動 $\nabla S_m u$ は、準静的等圧変化

$$\nabla S_m d\xi = \left[C_p + c_{mol} \frac{L}{\Theta_V} \right] \frac{\nabla T_m}{T_m} d\xi \quad (2.3)$$

からずれて、

$$\nabla S_m u = \left[f_\alpha C_p + f_\delta c_{mol} \frac{L}{\Theta_V} \right] \frac{\nabla T_m}{T_m} u \quad (2.7)$$

です。ここでは混合気体の流速

$$u \equiv \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \nabla \xi$$

の線形近似

$$u \simeq \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

を使った。(2.7)は、流体要素が温度勾配に沿って移動する際のエントロピー変動なので、エントロピー変動の対流項（あるいは移流項）です。

こうして、準静的エントロピー変化

$$dS = -\frac{\beta}{\rho_m} dp + \left[C_p + c_{mol} \frac{L}{\Theta_V} \right] \frac{\nabla T_m}{T_m} d\xi \quad (2.4)$$

に対応する線形近似のエントロピー変動は

$$\frac{dS}{dt} = -f_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} + \left[f_\alpha C_p + f_\delta c_{mol} \frac{L}{\Theta_V} \right] \frac{\nabla T_m}{T_m} u$$

すなわち

$$\frac{dS}{dt} = -f_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} + \left[f_\alpha C_p + f_\delta c_{mol} \frac{L}{\Theta_V} \right] \frac{\nabla T_m}{T_m} \frac{1-f_\nu}{1-\chi_\nu} \langle u \rangle_r \quad (2.8)$$

となる。

濡れた蓄熱器のエントロピー変動(2.8)から乾いた蓄熱器のエントロピー変動(2.5)が導出可能です。エントロピー変動(2.8)の対流項の中の

$$c_{mol} \frac{L}{\Theta_V}$$

に濡れた蓄熱器と乾いた蓄熱器との形式的相違が表現されているからです。乾いた蓄熱器では、 $c_{mol} = 0$ なので、(2.8)は(2.5)となる。この意味で(2.8)は(2.5)の拡張です。こうして、混合気体を対象とする熱輸送の一般式を頭には使うことなく、直感を頼りとして、濡れた蓄熱器のエントロピー変動(2.8)に辿り着いた。

(2.8)が理想気体近似の結果なのは $p_{mV} \neq 0$ と $p_{mV} \neq p_m$ の場合に限るので、乾いた蓄熱器 ($p_{mV} = 0$) では理想気体近似を使っていないことに注意して欲しい。

異種気体分子の相互拡散係数 δ は混合気体中の熱拡散係数 α の値に近いでしょう。以下の議論では、簡単のために、 $\delta \simeq \alpha$ とする。 ν/δ はシュミット数と呼ばれているので、 $\delta \simeq \alpha$ はシュミット数をプラントル数 $\text{Pr} \equiv \nu/\alpha$ はプラントル数で近似したことを意味する。

$\delta \simeq \alpha$ の場合には、 $f_\delta = f_\alpha$ なので、エントロピー変動(2.8)は

$$\frac{dS}{dt} = -f_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} + h \left[C_p + c_{mol} \frac{L}{\Theta_V} \right] \frac{\nabla T_m \langle u \rangle_r}{T_m}$$

すなわち

$$\frac{dS}{dt} = -f_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} + h \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m \langle u \rangle_r \quad (2.9)$$

となる。

(2.9)を流路断面内で平均すると

$$\frac{d\langle S \rangle_r}{dt} = -\chi_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} + \langle h \rangle_r \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m \langle u \rangle_r \quad (2.10)$$

です。 h の流路断面内平均

$$\langle h \rangle_r = \left\langle \frac{f_\alpha - f_\nu}{(1 - \text{Pr})(1 - \chi_\nu)} \right\rangle_r = \frac{\chi_\alpha - \chi_\nu}{(1 - \text{Pr})(1 - \chi_\nu)}$$

の実部も準静的変化の尺度です。

極限 $\nu \rightarrow 0$ では $\langle h \rangle_r \rightarrow \chi_\alpha$ です。後に、仕事源を議論する際に(2.10)を使う。

(2.9)を時刻で積分すると

$$S = -f_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} p + h \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m \langle \xi \rangle_r \quad (2.11)$$

です。 S と p は、それぞれ、時間平均 S_m と p_m からのずれを表す。後に、振動流によるエントロピー流密度を議論する際に(2.11)を使う。

3. 仕事流密度と仕事源

角周波数 $\omega > 0$ で振動する変位 ξ の流路断面内平均を $\langle \xi \rangle_r$ とし圧力を p とする。複素表示では

$$\begin{aligned}\langle \xi \rangle_r &= \langle \hat{\xi} \rangle_r \exp i\omega t \\ p &= \hat{p} \exp i(\omega t + \theta)\end{aligned}$$

です。 $\hat{\xi}$ は変位振幅であり、 \hat{p} は圧力振幅です。 p の位相は変位 ξ の流路断面平均 $\langle \xi \rangle_r$ の位相より位相差 θ だけ進んでいる。波を表現するには角周波数と振幅だけでなく位相差 θ も重要です。定在波では $\theta = 0$ あるいは $\pm\pi$ です。

流速 u は変位 ξ のラグランジュ微分です：

$$u \equiv \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \nabla \xi$$

線形近似では

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

です。流路断面内で平均した流速は、複素表示で、

$$\langle u \rangle_r = i\omega \langle \hat{\xi} \rangle_r \exp i\omega t = i\langle \hat{u} \rangle_r \exp i\omega t$$

です。ここで $\hat{u} = \omega \hat{\xi}$ は流速振幅です。同じことですが、

$$\langle u \rangle_r = \langle \hat{u} \rangle_r \exp i\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

は $\langle \xi \rangle_r$ よりも $\pi/2$ だけ位相が進んでいる。

複素表示を使うと時間平均の計算が容易になる。 $a = \hat{a}e^{i(\omega t + \theta)}$ と $b = \hat{b}e^{i\omega t}$ との積 $a \cdot b$ の時間平均は

$$\langle a \cdot b \rangle_t = \frac{1}{2} \Re(a^\dagger b) = \frac{1}{2} \hat{a} \hat{b} \cos \theta$$

です。ここで $a^\dagger = \hat{a}e^{-i(\omega t + \theta)}$ は a の複素共役です。

3.1 仕事流密度

仕事流密度 \tilde{I} は、単位面積を通り抜ける力学的エネルギーであり、音の強度に等しい：

$$\tilde{I} \equiv \langle p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t = \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \sin \theta$$

仕事流密度の方向と進行波の伝播方向は $\sin \theta$ の符号と同じです。 $\tilde{I} = 0$ となる $\theta = 0$ や $\theta = \pm\pi$ は定在波を表す。

3.2 仕事源

仕事源 W は仕事流密度 $\tilde{I} \equiv \langle p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t$ の湧き出しです：

$$W \equiv \nabla \tilde{I} = \langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t + \langle \nabla p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t \quad (3.1)$$

仕事源はこのように二つの項からなる。次に述べるように、エントロピー変動(2.10)と関わりがあるのは右辺第一項 $\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t$ だけです。

右辺第二項 $\langle \nabla p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t$ は

$$W_\nu \equiv \langle \nabla p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t = -\Im \left(\frac{1}{1 - \chi_\nu^\dagger} \right) \omega \frac{1}{2} \rho_m \langle \hat{u} \rangle_r^2 \leq 0 \quad (3.2)$$

です。(3.2)を導出するには流体力学の運動量保存則（ナビエ・ストークス方程式）の線型近似を使えばよい。ここで

$$\chi_\nu^\dagger \equiv \langle f_\nu \rangle_r^\dagger$$

は f_ν の流路断面内平均 $\langle f_\nu \rangle_r$ の複素共役であり、 W_ν が振動流速 u の流路断面内分布の非一様性と関わりがあることを意味する。 \Im は虚数部分を表す。 $\Im \chi_\nu^\dagger \geq 0$ なので W_ν は負またはゼロです。

W_ν は単位体積当たりの運動エネルギー

$$\frac{1}{2} \rho_m \langle \hat{u} \rangle_r^2$$

の粘性による散逸の流路断面内平均です。 W_ν は振動圧力 p や管壁の熱容量とも関わりが無い。 W_ν はエントロピー変動(2.10)とも関わりがない。

(3.1)の右辺第一項 $\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t$ を調べよう。

まず、密度 ρ のラグランジュ微分

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \nabla (\rho_m + \rho)$$

の線形近似

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \nabla \rho_m$$

に流体力学の質量保存則の線型近似

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho_m u) = 0$$

すなわち

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \nabla (\rho_m) + \rho_m \nabla u = 0$$

を使うと

$$\nabla u = -\frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho}{dt}$$

です。これを使うと

$$\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t = - \left\langle p \cdot \frac{1}{\rho_m} \frac{d\langle \rho \rangle_r}{dt} \right\rangle_t \quad (3.3)$$

です。従って、 $\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t$ にとっては密度変動（流体要素の密度のラグランジュ微分） $d\rho/dt$ が重要です。

密度変動 $d\rho/dt$ の流路断面内平均 $d\langle \rho \rangle_r/dt$ を調べる。密度の微小変化 $d\rho$ を圧力の微小変化 dp とエントロピーの微小変化 dS で表現すると、

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_p dS = \rho K_S dp - \rho \frac{\beta T}{C_p} dS$$

です。最後の変形には平衡状態の熱力学の恒等式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_p = \frac{\beta T}{\rho C_p} = \frac{(\gamma - 1)K_S}{\beta} \quad (3.4)$$

を使った。従って、

$$\frac{1}{\rho_m} \frac{d\langle \rho \rangle_r}{dt} = K_S \frac{dp}{dt} - \frac{\beta T_m}{C_p} \frac{d\langle S \rangle_r}{dt}$$

です。

$\nabla p_m = 0$ に注意すると、線形近似では

$$\frac{1}{\rho_m} \frac{d\langle \rho \rangle_r}{dt} = K_S \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\beta T_m}{C_p} \frac{d\langle S \rangle_r}{dt} \quad (3.5)$$

です。圧力 p のラグランジュ微分

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \nabla (p_m + p)$$

は、 $\nabla p_m = 0$ では

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \nabla p$$

であり、この線形近似は

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

だからです。

(3.5)によれば、密度変動 $d\rho/dt$ はエントロピー変動 dS/dt とも関わりがある。(3.3)

に(3.5)を使うと

$$\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t = \frac{\beta T_m}{C_p} \left\langle p \cdot \frac{d\langle S \rangle_r}{dt} \right\rangle_t = \rho_m \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \left\langle p \cdot \frac{d\langle S \rangle_r}{dt} \right\rangle_t \quad (3.6)$$

です。ここでは

$$\left\langle p \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right\rangle_t = 0$$

も使った。

(3.6)によれば、 $\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t$ はエントロピー変動

$$\frac{d\langle S \rangle_r}{dt} = -\chi_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} + \langle h \rangle_r \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m \langle u \rangle_r \quad (2.10)$$

と関わりがあり、 $\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t$ は熱（流）から仕事（流）へのエネルギー（流）変換密度の流路断面内平均

$$\left\langle p \cdot \frac{d\langle S \rangle_r}{dt} \right\rangle_t$$

に比例している。比例係数は、(3.4)により、

$$\frac{\beta T_m}{C_p} = \rho_m \frac{(\gamma - 1) K_S}{\beta}$$

です。

エントロピー変動(2.10)を使うと、エネルギー（流）変換密度の流路断面内平均は

$$\left\langle p \cdot \frac{d\langle S \rangle_r}{dt} \right\rangle_t = -\frac{\beta}{\rho_m} \langle p \cdot i\omega \chi_\alpha p \rangle_t + \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m \langle p \cdot \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \rangle_t$$

です。

こういうわけで、

$$W \equiv \nabla \tilde{I} = \langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t + \langle \nabla p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t \quad (3.1)$$

の右辺第一項 $\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t$ は二つの項の和

$$\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t = W_p + W_\theta$$

ただし

$$W_p \equiv -(\gamma - 1) K_S \langle p \cdot i\omega \chi_\alpha p \rangle_t$$

$$W_\theta \equiv \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \beta \nabla T_m \langle p \cdot \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \rangle_t$$

です。 W_p は圧力変動 $\partial p / \partial t$ によるエントロピー変動

$$-\chi_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t}$$

の表れであり、 W_θ はエントロピーのラグランジュ微分(2.10)の対流項

$$\langle h \rangle_r \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m \langle u \rangle_r$$

の表れです。

時間平均を実行すると

$$W_p = -\Im\chi_\alpha^\dagger \omega(\gamma - 1) \frac{1}{2} K_S \hat{p}^2 \leq 0 \quad (3.7)$$

$$W_\theta = \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] w_\theta \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (3.8)$$

ただし

$$w_\theta \equiv |\langle h \rangle_r| \sin(\theta - \arg\langle h \rangle_r) = \Re\langle h^\dagger \rangle_r \sin\theta + \Im\langle h^\dagger \rangle_r \cos\theta \quad (3.9)$$

です。ここで、 $\chi_\alpha^\dagger \equiv \langle f_\alpha \rangle_r^\dagger$ は f_α の流路断面内平均 $\chi_\alpha \equiv \langle f_\alpha \rangle_r$ の複素共役です。 $|\langle h \rangle_r|$ は複素数 $\langle h \rangle_r$ の絶対値です。(3.8)によれば、 W_θ は温度勾配 ∇T_m に比例しているため、一様温度 ($\nabla T_m = 0$) の管では $W_\theta = 0$ です。

(3.7)によれば、 $W_p \leq 0$ は単位体積あたりの振動の位置エネルギー

$$\frac{1}{2}(\gamma - 1)K_S \hat{p}^2$$

の散逸を表す。この散逸は流路断面内でのエントロピー拡散によるものです。

(3.2)と(3.7)によれば

$$W_A \equiv W_\nu + W_p \leq 0$$

です。このことは経験則「一様温度 ($\nabla T_m = 0$) の管の中の音波は減衰することはあるが増幅されることはない」に対応する。

まとめると、仕事源は三つの項からなる：

$$W = W_A + W_\theta \quad (3.10)$$

ただし

$$W_A \equiv W_\nu + W_p$$

です。 W_ν はエントロピー変動あるいはエントロピーのラグランジュ微分の線形近似

$$\frac{d\langle S \rangle_r}{dt} = -\chi_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} + \langle h \rangle_r \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m \langle u \rangle_r \quad (2.10)$$

とは無関係ですが、 W_p と W_θ は(2.10)と関わりがある。 W_p は(2.10)の右辺第一項の顕れであり、 W_θ は(2.9)の右辺第二項 (対流項) の顕れです。

$W_A \equiv W_\nu + W_p$ は温度勾配 ∇T_m に依らない。音響インピーダンス

$$Z \equiv \frac{\hat{p}}{\langle \hat{u} \rangle_r}$$

を使うと

$$\langle \hat{u} \rangle_r^2 = \frac{1}{Z} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad \text{かつ} \quad \hat{p}^2 = Z \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

なので

$$W_A = - \left[\Im \left(\frac{1}{1 - \chi_v^\dagger} \right) \frac{\rho_m}{Z} + \Im \chi_\alpha^\dagger (\gamma - 1) K_S Z \right] \omega \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \leq 0 \quad (3.11)$$

です。 $W_A \leq 0$ は $\nabla T_m = 0$ の場合の管内音波が減衰することに対応する。

(3.8)によれば、温度勾配 ∇T_m に比例する項は

$$W_\theta = \frac{1}{2} w_\theta^* \beta \nabla T_m \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (3.12)$$

ただし

$$w_\theta^* \equiv \left(1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right) w_\theta \quad (3.13)$$

です。 w_θ^* には濡れた蓄熱器の寄与が明白に表現されている。

$$\frac{w_\theta^*}{w_\theta} = 1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \geq 1$$

に注意しよう。 $w_\theta > 0$ の場合の $W_\theta > 0$ あるいは $w_\theta^* > 0$ は飽和蒸気のモル濃度 c_{mol} の増加関数です。

3.3 熱音響原動機の温度勾配の下限

$W = 0$ となる温度勾配を $(\nabla T_m)_W$ とする。(3.12)により、

$$(\nabla T_m)_W \equiv \frac{-2W_A}{w_\theta^* \beta \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r} \quad (3.14)$$

です。従って、 $(\nabla T_m)_W$ は w_θ^* と符号が同じです。

(3.14)の右辺に(3.11)を使うと、

$$(\nabla T_m)_W = \frac{\omega}{w_\theta^* \beta} \left[\Im \left(\frac{1}{1 - \chi_v^\dagger} \right) \frac{\rho_m}{Z} + \Im \chi_\alpha^\dagger (\gamma - 1) K_S Z \right] \quad (3.15)$$

です。(3.15)に依れば、 $(\nabla T_m)_W$ は振動モード（角周波数 ω 、音響インピーダンス Z 、位相差 θ など）に依存するが振幅 $\sqrt{\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r}$ に依らない。

熱音響原動機 ($W > 0$) では

$$W = W_\theta + W_A > 0$$

が必要です。 $W_A \leq 0$ なので、 $W > 0$ のためには

$$W_\theta > 0$$

すなわち

$$w_{\theta}^* > 0 \quad (3.16)$$

が必要です。(3.16)の場合には

$$(\nabla T_m)_W > 0$$

です。更に $W > 0$ のためには

$$\nabla T_m > (\nabla T_m)_W$$

も必要です。

$(\nabla T_m)_W > 0$ は熱音響原動機 ($W > 0$) の温度勾配の下限です。熱音響自励振動では、 $(\nabla T_m)_W > 0$ は臨界温度勾配と呼ばれている。

(3.15)によれば、 $(\nabla T_m)_W > 0$ は c_{mol} の減少関数です。つまり、臨界温度勾配 $(\nabla T_m)_W$ は乾いた蓄熱器よりも濡れた蓄熱器のほうが小さい。このことは経験事実と一致する。この意味で、熱音響原動機や熱音響自励振動にとっては濡れた蓄熱器が好ましい。濡れた蓄熱器を使うことで、熱音響原動機の実用化が促進される可能性がある。

熱音響原動機 ($W > 0$) の必要条件(3.16)は熱音響原動機 ($W > 0$) が可能な位相差 θ を制限する。

$$w_{\theta} \equiv |\langle h \rangle_r| \sin(\theta - \arg\langle h \rangle_r) = \Re\langle h^{\dagger} \rangle_r \sin\theta + \Im\langle h^{\dagger} \rangle_r \cos\theta \quad (3.9)$$

によれば、 $w_{\theta} > 0$ となる位相差の範囲は

$$-\arg\langle h^{\dagger} \rangle_r < \theta < \pi - \arg\langle h^{\dagger} \rangle_r \quad (3.17)$$

です。(3.17)は熱音響原動機の必要条件の一つです。 $w_{\theta} > 0$ が最大になるのは、(3.9)

によれば

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arg\langle h^{\dagger} \rangle_r$$

の場合です。

4. エントロピー流密度とエントロピー生成密度

エントロピー流密度 \tilde{S} は、熱伝導によるエントロピー流密度

$$\tilde{S}_\kappa \equiv -\kappa \frac{\nabla T_m}{T_m} \leq 0$$

と振動流によるエントロピー流密度

$$\rho_m \langle \langle S \cdot u \rangle_t \rangle_r$$

との和です：

$$\tilde{S} \equiv \tilde{S}_\kappa + \rho_m \langle \langle S \cdot u \rangle_t \rangle_r$$

流体の運動と関わりのない \tilde{S}_κ は、エントロピーのラグランジュ微分とは関わりが無い。エントロピーのラグランジュ微分と関わりがあるのは $\rho_m \langle \langle S \cdot u \rangle_t \rangle_r$ だけです。

余談ですが、流体力学で扱うエンタルピー流密度は、流体の運動に伴うエネルギー流密度

$$\tilde{H} = T_m \rho_m \langle \langle S \cdot u \rangle_t \rangle_r + \tilde{I}$$

だけであり、静止流体の熱伝導によるエントロピー流密度 \tilde{S}_κ を含まない。 \tilde{S}_κ を含めたエネルギー流密度は

$$T_m \tilde{S} + \tilde{I} = \tilde{H} + T_m \tilde{S}_\kappa$$

です。

振動流によるエントロピー流密度は

$$\rho_m \langle \langle S \cdot u \rangle_t \rangle_r = \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D$$

ただし

$$\tilde{S}_\theta \equiv -\beta \langle \langle f_\alpha p \cdot u \rangle_t \rangle_r$$

$$\tilde{S}_D \equiv \rho_m \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m \langle \langle h \langle \xi \rangle_r \cdot u \rangle_t \rangle_r$$

です。これは、エントロピー変動

$$S = -f_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} p + h \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m \langle \xi \rangle_r \quad (2.11)$$

を使った結果です。 \tilde{S}_θ は(2.11)の右辺第一項の顕れであり、 \tilde{S}_D は(2.11)の右辺第二項すなわちエントロピーのラグランジュ微分の対流項の顕れです。

ここで井上龍夫さんの指摘「 W_θ と \tilde{S}_D の間には何らかの関係があるように思う」(1994年頃)を思い出した。井上さんの指摘は正しい。何故なら、 ∇T_m に比例する W_θ と \tilde{S}_D とはエントロピーのラグランジュ微分の対流項の顕れだからです。なお W_p と \tilde{S}_θ とはいずれも振動圧力 p によるエントロピー変動の顕れです。

時間平均作業を実行すると

$$\langle \langle f_\alpha p \cdot u \rangle_i \rangle_r = \left| \langle g^\dagger \rangle_r \right| \sin(\theta - \arg \langle g^\dagger \rangle_r) \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

と

$$\langle \langle h \langle \xi \rangle_r \cdot u \rangle_i \rangle_r = - \mathfrak{F} \langle g_D^\dagger \rangle_r \frac{1}{2} \langle \hat{\xi} \rangle_r \langle \hat{u} \rangle_r \leq 0$$

です。ここで

$$\langle g^\dagger \rangle_r \equiv \frac{\chi_\alpha^\dagger - \chi_\nu}{(1 + \text{Pr})(1 - \chi_\nu)} \geq 0$$

$$\mathfrak{F} \langle g_D^\dagger \rangle_r \equiv \frac{\mathfrak{F} \chi_\alpha^\dagger - \text{Pr} \mathfrak{F} \chi_\nu^\dagger}{(1 - \text{Pr}^2) |1 - \chi_\nu|^2} \geq 0$$

は数式表現を短くするために導入した無次元量です。

従って、エントロピー流密度は3項の和

$$\tilde{S} \equiv \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa \quad (4.1)$$

です。

\tilde{S}_θ については

$$\tilde{S}_\theta = \frac{1}{2} s_\theta \beta \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.2)$$

です。ここで

$$s_\theta \equiv - \left| \langle g^\dagger \rangle_r \right| \sin(\theta - \arg \langle g^\dagger \rangle_r) = - \Re \langle g^\dagger \rangle_r \sin \theta + \mathfrak{F} \langle g^\dagger \rangle_r \cos \theta \quad (4.3)$$

は、数式表現を短くする為に導入された位相差 θ の無次元関数です。

\tilde{S}_D については

$$\tilde{S}_D = - \mathfrak{F} \langle g_D^\dagger \rangle_r \rho_m \nabla S_m \frac{1}{2} \langle \hat{\xi} \rangle_r \langle \hat{u} \rangle_r \leq 0$$

です。これは、温度勾配 ∇T_m に比例し熱膨張率 β にも位相差 θ にも依らない。数式表現を見やすくするために、非凝縮性気体が振動運動することによる実効熱伝導度

$$\kappa_D \equiv \mathfrak{F} \langle g_D^\dagger \rangle_r \rho_m C_p \frac{1}{2} \langle \hat{\xi} \rangle_r \langle \hat{u} \rangle_r \geq 0$$

を導入し、

$$\nabla S_m = \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m$$

に注意すると、濡れた蓄熱器では

$$\tilde{S}_D = - \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \kappa_D \frac{\nabla T_m}{T_m} \leq 0$$

です。さらに、混合気体が振動運動することによる実効熱伝導度

$$\kappa_D^* \equiv \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \kappa_D \geq \kappa_D \quad (4.4)$$

を導入すると、

$$\tilde{S}_D = - \kappa_D^* \frac{\nabla T_m}{T_m} \leq 0$$

であり、乾いた蓄熱器 ($c_{mol} = 0$) では

$$\tilde{S}_D = - \kappa_D \frac{\nabla T_m}{T_m} \leq 0$$

です。

$-\tilde{S}_D \geq 0$ はドリームパイプなどで重要です。添え字Dはdreamの頭文字に因む。 $\kappa_D^* \geq \kappa_D$ なので、ドリームパイプにとっても、乾いた蓄熱器よりも濡れた蓄熱器のほうが好ましい。

κ_D は $(1/2)\langle \hat{u} \rangle_r^2$ に比例している。音響インピーダンス $Z \equiv \hat{p} / \langle \hat{u} \rangle_r$ を使うと

$$\langle \hat{\xi} \rangle_r = \frac{1}{\omega Z} \hat{p}$$

なので

$$\frac{1}{2} \langle \hat{u} \rangle_r^2 = \frac{1}{\omega Z} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

です。音響インピーダンスが同じなら、 κ_D も $(1/2)\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$ に比例している。

4.1 熱音響ヒートポンプの温度勾配の上限

エントロピー流密度

$$\tilde{S} \equiv \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa \quad (4.1)$$

は温度勾配 ∇T_m の減少関数です：

$$\tilde{S} = \tilde{S}_\theta - \left(\kappa + \kappa_D^* \right) \frac{\nabla T_m}{T_m} \quad (4.5)$$

\tilde{S} は $\nabla T_m = 0$ で最大値 \tilde{S}_θ をとる。

熱音響ヒートポンプ ($\tilde{S} \nabla T_m > 0$) では $\tilde{S}_\theta > 0$ が必要です。熱音響ヒートポンプ以外 ($\tilde{S} \nabla T_m < 0$) の熱音響現象では $-(\tilde{S}_\kappa + \tilde{S}_D) \geq 0$ が大きい。

熱音響ヒートポンプ ($\tilde{S} \nabla T_m > 0$) の必要条件 $\tilde{S}_\theta > 0$ は

$$s_\theta > 0 \quad (4.6)$$

と同じです。これは(4.3)によれば、

$$-\pi + \arg\langle g^\dagger \rangle_r < \theta < \arg\langle g^\dagger \rangle_r \quad (4.7)$$

と同じです。(4.3)によれば、 $\tilde{S}_\theta > 0$ が最大になるのは

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + \arg\langle g^\dagger \rangle_r$$

の場合です。なお、(4.6)は熱音響ヒートポンプの必要条件の一つです。

温度勾配 ∇T_m が小さい場合には、主に W_A により仕事が散逸し、位相差 θ を(4.7)のように選ぶと、(4.6)が成り立つ。こうして熱音響ヒートポンプ ($\tilde{S}\nabla T_m > 0$) が可能となる。熱音響原動機 ($W > 0$) の議論では仕事源 W に関わる温度勾配

$$(\nabla T_m)_W \equiv \frac{-2W_A}{w_\theta^* \beta \hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r} \quad (3.14)$$

が重要な役割を担ったように、熱音響ヒートポンプ ($\tilde{S}\nabla T_m > 0$) の議論ではエントロピー流密度 \tilde{S} に関わる温度勾配

$$(\nabla T_m)_{\tilde{S}} \equiv \frac{T_m \tilde{S}_\theta}{\kappa + \kappa_D^*} = \frac{1}{2} s_\theta \beta T_m \Gamma \quad (4.8)$$

が重要な役割を担う。ここで

$$\Gamma \equiv \frac{\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r}{\kappa + \kappa_D^*} \geq 0 \quad (4.9)$$

の次元は温度勾配の次元と同じです。 Γ は振動モードと $\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$ に依存する。

$\tilde{S}_\theta > 0$ すなわち(4.6)の場合の $(\nabla T_m)_{\tilde{S}} > 0$ は熱音響ヒートポンプ ($\tilde{S}\nabla T_m > 0$) で得られる温度勾配の上限です：

$$\nabla T_m < (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$$

なぜなら、(4.5)と(4.8)とから

$$\tilde{S} = \frac{\kappa + \kappa_D^*}{T_m} \left[(\nabla T_m)_{\tilde{S}} - \nabla T_m \right]$$

となり、この \tilde{S} が ∇T_m の減少関数だからです。

熱音響ヒートポンプ ($\tilde{S}\nabla T_m \geq 0$) で得られる温度勾配の上限 $(\nabla T_m)_{\tilde{S}} > 0$ は濡れた蓄熱器では乾いた蓄熱器より小さい。なぜなら

$$\kappa_D^* \equiv \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \kappa_D \geq \kappa_D \quad (4.4)$$

だからです。

このために、濡れた蓄熱器は熱音響ヒートポンプにとっては好ましくない。このことは、実用化された熱音響ヒートポンプ（パルス管冷凍機やスターリング冷凍機など）が乾いた蓄熱器を使っている理由の一つだろう。

(4.8)によれば、 $(\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ は、 \tilde{S}_θ や s_θ と符号が同じで、 Γ を通して振幅 $\sqrt{\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r}$ の2乗 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ に依存する。

$\Gamma \geq 0$ の $\hat{p}\hat{u}$ 依存性を調べよう。(4.9)によれば、 $\Gamma \geq 0$ は $\hat{p}\hat{u}$ の増加関数です。微小振幅 ($\kappa_D^* \ll \kappa$) では

$$\Gamma \simeq \frac{\hat{p}\hat{u}}{\kappa}$$

ですが、大振幅 ($\kappa_D^* \gg \kappa$) では

$$\Gamma \simeq \frac{\hat{p}\hat{u}}{\kappa_D^*}$$

となる(図4.1)。音響インピーダンスが同じなら、 κ_D も $(1/2)\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ に比例しているので、 Γ の $\hat{p}\hat{u}$ 依存性は $\kappa_D^* \gg \kappa$ では小さい。 Γ が振幅に依存するのは $\kappa > 0$ が有限のためです。

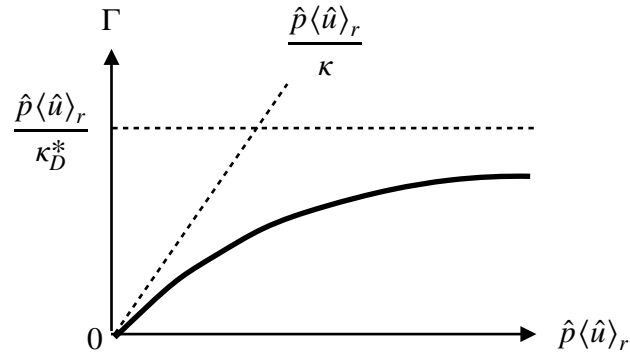


図4.1 $\Gamma \equiv \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r / (\kappa + \kappa_D^*)$ の $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ 依存性：微小振幅 ($\kappa_D^* \ll \kappa$) では $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ に比例するが、大振幅 ($\kappa_D^* \gg \kappa$) では $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ によらない定数に漸近する。 $\kappa_D^* = \kappa$ となる $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ では $\Gamma = (1/2)\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r / \kappa_D^*$ です。 $\kappa_D^* > \kappa$ では Γ の $\hat{p}\hat{u}$ 依存性が小さい。

実用的熱音響ヒートポンプ ($(\nabla T_m)_{\tilde{S}} > 0$) では温度勾配 ∇T_m が大きいこととエントロピー流 $\tilde{S} > 0$ が大きいことが重要です。

両者の積 $\tilde{S}\nabla T_m$ を調べよう。(4.5)によれば、 $\tilde{S}\nabla T_m$ は温度勾配 ∇T_m の2次式

$$\tilde{S}\nabla T_m = \left[\tilde{S}_\theta - \left(\kappa + \kappa_D^* \right) \frac{\nabla T_m}{T_m} \right] \nabla T_m = \frac{\kappa + \kappa_D^*}{T_m} \left[(\nabla T_m)_{\tilde{S}} - \nabla T_m \right] \nabla T_m$$

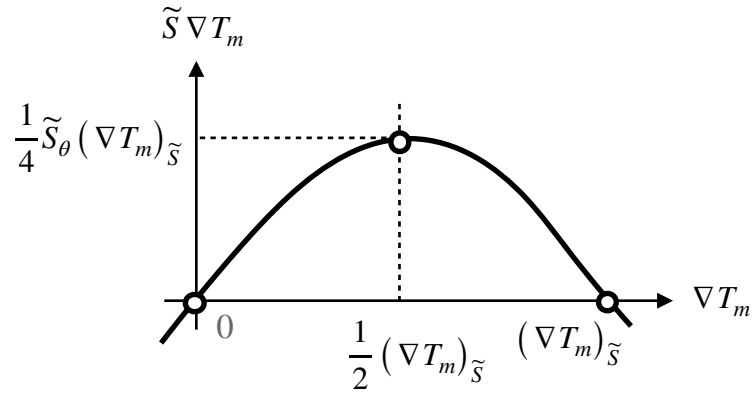


図4.2 $\tilde{S} \nabla T_m$ の ∇T_m 依存性： $(\nabla T_m)_{\tilde{S}} > 0$ の場合。ヒートポンプでは $0 < \nabla T_m < (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ が必要です。この領域の中間 $\nabla T_m = (\nabla T_m)_{\tilde{S}}/2$ で最大値 $\tilde{S}_\theta (\nabla T_m)_{\tilde{S}}/4$ をとる。 $\nabla T_m = 0$ の場合は $W_A \leq 0$ による単純な減衰振動であり、 $\nabla T_m = (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ の場合は熱音響ヒートポンプとドリームパイプの境界です。

です。 $\tilde{S} \nabla T_m = 0$ となるのは、 $\nabla T_m = 0$ の場合と $\nabla T_m = (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ の場合とがある。前者 $\nabla T_m = 0$ の場合は $W_A \leq 0$ による単純な減衰振動であり、後者 $\nabla T_m = (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ の場合は熱音響ヒートポンプとドリームパイプの境界です。 $\tilde{S} \nabla T_m > 0$ となるのは、 $0 < \nabla T_m < (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ の場合だけです。 $\tilde{S} \nabla T_m$ は、図4.2に図示したように、

$$\nabla T_m = \frac{1}{2} (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$$

で最大値

$$\frac{1}{4} \tilde{S}_\theta (\nabla T_m)_{\tilde{S}} = \frac{\tilde{S}_\theta}{2} \frac{(\nabla T_m)_{\tilde{S}}}{2}$$

をとる。従って、実用的熱音響ヒートポンプでは、 $\tilde{S} \nabla T_m$ が最大となるように温度勾配は、 $(\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ の半分程度で動作させるのが良い。

4.2 濡れた蓄熱器の質量流密度

エントロピー流密度 $\tilde{S} = \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa$ のうちで管内流体の振動運動に関わるのは \tilde{S}_θ と \tilde{S}_D だけです。

濡れた蓄熱器と乾いた蓄熱器とでは \tilde{S}_θ は同じだが、 \tilde{S}_D には

$$\Delta \tilde{S}_D \equiv - \left(\kappa_D^* - \kappa_D \right) \frac{\nabla T_m}{T_m}$$

だけの差がある。

$$\kappa_D^* \equiv \left[1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right] \kappa_D \geq \kappa_D \quad (4.4)$$

を使うと

$$\Delta\tilde{S}_D = -c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \kappa_D \frac{\nabla T_m}{T_m}$$

です。

飽和蒸気と液体との単位質量あたりのエントロピー差 $\Delta S_L \equiv L/T_m$ を使うと

$$\frac{\Delta\tilde{S}_D}{\Delta S_L} = -c_{mol} \frac{\kappa_D \nabla T_m}{C_p \Theta_V}$$

です。

$\Delta\tilde{S}_D/\Delta S_L$ と質量流密度とは次元が同じです。混合気体の比熱 C_p を消すために

$$\kappa_D \equiv \mathfrak{S}\langle g_D^\dagger \rangle_r \rho_m C_p \frac{1}{2} \langle \hat{\xi} \rangle_r \langle \hat{u} \rangle_r \geq 0$$

を使うと

$$\frac{\Delta\tilde{S}_D}{\Delta S_L} = -\frac{1}{2} \mathfrak{S}\langle g_D^\dagger \rangle_r \frac{\langle \hat{\xi} \rangle_r \nabla T_m}{\Theta_V} c_{mol} \rho_m \langle \hat{u} \rangle_r$$

となるからです。

$\Delta\tilde{S}_D/\Delta S_L$ の符号は負なので、 $\Delta\tilde{S}_D/\Delta S_L$ は高温部から低温部へ向かう質量流密度です。つまり、乾いた蓄熱器とは異なり、濡れた蓄熱器では高温部から低温部へ向かう質量流が存在する。

質量流密度 $\Delta\tilde{S}_D/\Delta S_L$ は飽和蒸気のコル濃度 c_{mol} に比例している。飽和蒸気圧 p_{mV} は温度 T_m の増加関数なので、コル濃度 c_{mol} も温度 T_m の増加関数です。このため $\Delta\tilde{S}_D/\Delta S_L$ の大きさは高温部で大きく低温部で小さい。このために、濡れた蓄熱器の高温部は低温部より乾きやすい。このことも経験事実です。

こういうわけで、蓄熱器の高温部を濡らし続ける工夫が必要です。フルイダイン（水スターリングエンジン）やポンポン船の液体ピストンは高温部を濡らし続けるのに役立っているのだろう。

4.3 エントロピー生成密度

周期的定常状態のエントロピー生成密度は

$$\sigma = -\frac{1}{T_m} \left(W + \tilde{S} \nabla T_m \right) \quad (1.1)$$

です。熱力学第二法則（ $\sigma \geq 0$ ）により

$$W + \tilde{S} \nabla T_m \leq 0$$

です。

熱音響理論では

$$\sigma = \frac{-W_A}{T_m} - (\tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa) \frac{\nabla T_m}{T_m} - \frac{W_\theta + \tilde{S}_\theta \nabla T_m}{T_m}$$

です。これは、(1.1)の仕事源 W に

$$W = W_A + W_\theta \quad (3.10)$$

を代入し、エントロピー流密度 \tilde{S} に

$$\tilde{S} = \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa \quad (4.1)$$

を代入して整理しただけです。

エントロピー生成密度を更に書き換えると

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_\kappa + \sigma_D + \sigma_\theta$$

です。ここでは、見やすくするために、

$$\begin{aligned} \sigma_A &\equiv \frac{-W_A}{T_m} \geq 0 \\ \sigma_\kappa &\equiv -\tilde{S}_\kappa \frac{\nabla T_m}{T_m} = \frac{1}{\kappa} \tilde{S}_\kappa^2 = \kappa \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2 \geq 0 \\ \sigma_D &\equiv -\tilde{S}_D \frac{\nabla T_m}{T_m} = \frac{1}{\kappa_D^*} \tilde{S}_D^2 = \kappa_D^* \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2 \geq 0 \\ \sigma_\theta &\equiv -\frac{W_\theta + \tilde{S}_\theta \nabla T_m}{T_m} \end{aligned}$$

を導入した。 σ_A と σ_κ と σ_D は負になることが無い。 σ_θ は

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{2} (w_\theta^* + s_\theta) \beta \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \frac{\nabla T_m}{T_m} \quad (4.10)$$

です。これは

$$W_\theta = \frac{1}{2} w_\theta^* \beta \nabla T_m \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (3.12)$$

と

$$\tilde{S}_\theta = \frac{1}{2} s_\theta \beta \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.2)$$

の結果です。

位相差 θ に依存する σ_θ だけは、正にも負にもなる。(4.10)によれば、 $w_\theta^* + s_\theta > 0$ の場合には $\sigma_\theta < 0$ です。この場合でも熱力学第二法則

$$W + \tilde{S} \nabla T_m \leq 0$$

を満足する必要がある。

エントロピー生成密度の ∇T_m 依存性を調べよう。 $\sigma_A \geq 0$ は $\nabla T_m/T_m$ に依存しないが、 σ_θ は $\nabla T_m/T_m$ に比例し、 $\sigma_D \geq 0$ と $\sigma_\kappa \geq 0$ とは $\nabla T_m/T_m$ の2乗に比例しているので、エントロピー生成密度 σ は $\nabla T_m/T_m$ の2次式です：

$$\sigma = \sigma_A - \frac{1}{2} (w_\theta^* + s_\theta) \beta \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \frac{\nabla T_m}{T_m} + (\kappa + \kappa_D^*) \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2$$

見やすくするために、これを書き換えると

$$\sigma = \sigma_A - (\kappa + \kappa_D^*) \frac{\nabla T_m}{T_m} \left[2 \frac{(\nabla T_m)_\sigma}{T_m} - \frac{\nabla T_m}{T_m} \right] \quad (4.11)$$

です。ここで

$$(\nabla T_m)_\sigma \equiv \frac{1}{4} (w_\theta^* + s_\theta) \beta T_m \Gamma \quad (4.12)$$

は $w_\theta^* + s_\theta$ と同符号で、

$$(\nabla T_m)_{\tilde{S}} \equiv \frac{T_m \tilde{S}_\theta}{\kappa + \kappa_D^*} = \frac{1}{2} s_\theta \beta T_m \Gamma \quad (4.8)$$

と同様に、

$$\Gamma \equiv \frac{\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r}{\kappa + \kappa_D^*} \geq 0 \quad (4.9)$$

を通して $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ に依存している。

(4.11)によれば、 $(\nabla T_m)_\sigma$ の符号によりエントロピー生成密度 σ の ∇T_m 依存性が異なる。 $(\nabla T_m)_\sigma \leq 0$ すなわち $w_\theta^* + s_\theta \leq 0$ の場合の σ は ∇T_m の単調増加関数です。しかし、 $(\nabla T_m)_\sigma > 0$ すなわち $w_\theta^* + s_\theta > 0$ の場合の σ は、 $\nabla T_m < (\nabla T_m)_\sigma$ では ∇T_m の減少関数ですが、 $\nabla T_m > (\nabla T_m)_\sigma$ では ∇T_m の増加関数なので、 $\nabla T_m = (\nabla T_m)_\sigma$ で最小値

$$\sigma_{\min} \equiv \sigma_A - (\kappa + \kappa_D^*) \left[\frac{(\nabla T_m)_\sigma}{T_m} \right]^2$$

をとる。熱力学第二法則 ($\sigma_{\min} \geq 0$) により

$$(\nabla T_m)_\sigma \leq T_m \sqrt{\frac{\sigma_A}{\kappa + \kappa_D^*}} \quad (4.13)$$

も必要です。この右辺は $(\nabla T_m)_\sigma$ の上限であり、 $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ の増加関数です。

仕事源 W に関わる $(\nabla T_m)_W$ とエントロピー流密度 \tilde{S} に関わる $(\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ とエントロピー生成密度 σ に関わる $(\nabla T_m)_\sigma$ とは、いずれも、振動モード（角周波数 ω 、音響インピーダンス Z 、位相差 θ など）に依存する。 $(\nabla T_m)_W$ だけは $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ に依らないが、 $(\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ と $(\nabla T_m)_\sigma$ とは $\Gamma \geq 0$ を通して $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ に依る。

熱音響原動機 ($W > 0$) が可能な $(\nabla T_m)_W > 0$ の場合には、熱音響原動機の温度勾配の下限が $(\nabla T_m)_W$ です。熱音響ヒートポンプ ($\tilde{S} \nabla T_m > 0$) が可能な $(\nabla T_m)_{\tilde{S}} > 0$ の場合には、熱音響ヒートポンプの温度勾配の上限が $(\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ です。 $(\nabla T_m)_\sigma$ と熱音響熱機関との関わりについては第5章で述べる。

5. エントロピー生成最小の法則

一様温度 ($\nabla T_m = 0$) の場合の管内音波によるエントロピー生成密度

$$\sigma_A \equiv \frac{-W_A}{T_m} \geq 0$$

は振幅の2乗に比例するので、振幅が小さいほうがエントロピー生成密度が小さい。

一様温度 ($\nabla T_m = 0$) の管内音波が減衰するのはエントロピー生成最小の法則の表れです。

熱伝導現象のエントロピー流密度

$$\tilde{S}_\kappa \equiv -\kappa \frac{\nabla T_m}{T_m}$$

は高温部から低温部へ向かう：

$$\tilde{S}_\kappa \nabla T_m \leq 0$$

このことに我々は慣れていたので $\kappa \geq 0$ を当然のこととしているが、熱伝導度 κ や実効熱伝導度 κ_D^* の値が正またはゼロなのは熱力学第二法則の表れです。熱伝導現象によるエントロピー生成密度

$$\sigma_\kappa \equiv -\tilde{S}_\kappa \frac{\nabla T_m}{T_m} = \frac{1}{\kappa} \tilde{S}_\kappa^2 = \kappa \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2 \geq 0$$

と広義の熱伝導現象によるエントロピー生成密度

$$\sigma_D \equiv -\tilde{S}_D \frac{\nabla T_m}{T_m} = \frac{1}{\kappa_D^*} \tilde{S}_D^2 = \kappa_D^* \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2 \geq 0$$

とはエントロピー流密度の2乗あるいは ∇T_m の2乗に比例しているので、 $\sigma_\kappa \geq 0$ や $\sigma_D \geq 0$ のためには $\kappa \geq 0$ や $\kappa_D \geq 0$ が必要だからです。

熱伝導度 κ や実効熱伝導度 κ_D^* が関わる広義の熱伝導現象もエントロピー生成最小の法則の表れです。高温の物体と低温の物体とを接触させると、温度勾配が小さくなるように、高温部から低温部へ向かうエントロピー流が生じる。 \tilde{S}_κ は、高温部のエントロピーを減らし低温部のエントロピーを増やすので、温度勾配 ∇T_m を小さくし、 ∇T_m の2乗に比例するエントロピー生成密度 σ_κ を減らす。 \tilde{S}_D についても、 \tilde{S}_κ と同様に ∇T_m の2乗に比例するエントロピー生成密度 σ_D を減らす。エントロピー流密度や温度勾配が小さくなると σ_κ も小さくなる。

第4章で議論したように、熱音響現象のエントロピー生成密度 σ には

$$\sigma_A \equiv \frac{-W_A}{T_m} \geq 0$$

と

$$\sigma_\kappa + \sigma_D = (\kappa + \kappa_D^*) \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2 \geq 0$$

だけではなく、

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{2} (w_\theta^* + s_\theta) \beta \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \frac{\nabla T_m}{T_m} \quad (4.10)$$

が存在するので

$$\sigma = \sigma_A - (\kappa + \kappa_D^*) \frac{\nabla T_m}{T_m} \left[2 \frac{(\nabla T_m)_\sigma}{T_m} - \frac{\nabla T_m}{T_m} \right] \quad (4.11)$$

ただし

$$(\nabla T_m)_\sigma \equiv \frac{1}{4} (w_\theta^* + s_\theta) \beta T_m \Gamma \quad (4.12)$$

$$\Gamma \equiv \frac{\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r}{\kappa + \kappa_D^*} \geq 0 \quad (4.9)$$

です。

$\sigma_\theta \geq 0$ の場合には熱力学第二法則 ($\sigma \geq 0$) が自動的に成り立つが、 $\sigma_\theta < 0$ すなわち

$$w_\theta^* + s_\theta > 0 \quad (5.1)$$

の場合の σ は $\nabla T_m = (\nabla T_m)_\sigma$ で最小値 σ_{\min} をとる (図5.1)。(5.1)の場合の σ は、(4.11)によれば、 $\nabla T_m < (\nabla T_m)_\sigma$ では ∇T_m の減少関数ですが、 $\nabla T_m > (\nabla T_m)_\sigma$ では ∇T_m の増加関数だからです。

熱力学第二法則により、 $\sigma_{\min} \geq 0$ すなわち

$$(\nabla T_m)_\sigma \leq T_m \sqrt{\frac{\sigma_A}{\kappa + \kappa_D^*}} \quad (4.13)$$

が必要です。この右辺は $(\nabla T_m)_\sigma$ の上限であり、この上限も $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ に依存する。

熱音響ヒートポンプ ($0 < \tilde{S} \nabla T_m \leq -W$) のエントロピー流密度 $\tilde{S} > 0$ は、低温部から高温部へ向かい、 ∇T_m が大きくなる。このことは、広義の熱伝導現象とも異なり、エントロピー生成最小の法則に抵触するように見える。しかし、(5.1)の場合のエントロピー生成密度 σ は、 $\nabla T_m < (\nabla T_m)_\sigma$ では ∇T_m の減少関数なので、 ∇T_m が大きくなることでエントロピー生成が小さくなる。つまり、エントロピー生成最小の法則によれば、 $\nabla T_m < (\nabla T_m)_\sigma$ の場合には熱音響ヒートポンプが安定です。

熱音響原動機 ($0 < W \leq -\tilde{S} \nabla T_m$) は、熱音響ヒートポンプとは異なり、自励振動です。このために、実験者が選べるのは振動モードとエントロピー流密度の大きさ

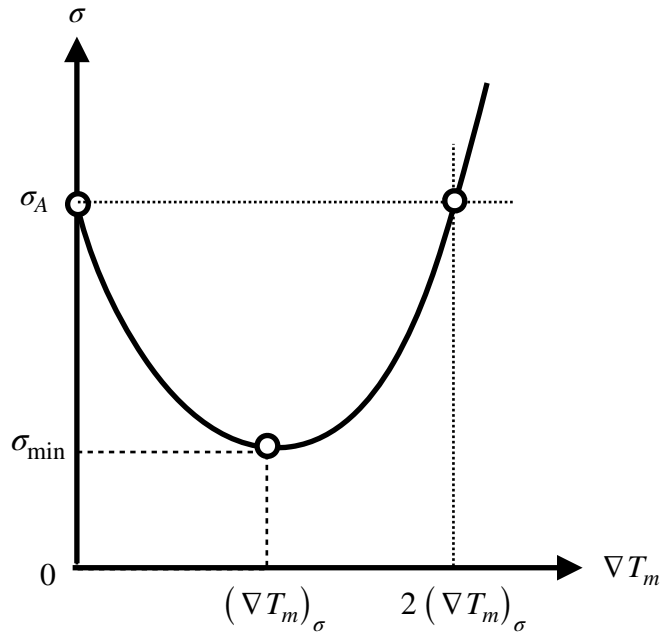


図5.1 エントロピー生成密度 σ の ∇T_m 依存性： $(\nabla T_m)_\sigma > 0$ の場合には、 $\nabla T_m = (\nabla T_m)_\sigma$ で、エントロピー生成が最小値 σ_{\min} をとる。 $\nabla T_m = (\nabla T_m)_\sigma$ が実現するには、熱力学第二法則により $\sigma_{\min} \geq 0$ も必要です。

$-\tilde{S} > 0$ だけです。温度勾配 ∇T_m だけでなく振幅も自然が選ぶ。自励振動の振幅は有限で、 $W > 0$ です。この意味で $W < 0$ の梵鐘の歪み振動とは異なる。しかし、(5.1)の場合には、与えられた $-\tilde{S} > 0$ のもとでエントロピー生成密度 σ が最小となるような温度勾配と振幅の組み合わせが安定でしょう。

こういうわけで、安定な熱音響熱機関が安定に動作するための必要条件の一つは $\sigma_\theta < 0$ すなわち(5.1)です。

なお、エントロピー生成最小の法則に基づく熱音響熱機関の安定性の議論では、エントロピー生成密度 σ と温度勾配 ∇T_m との関係 (4.11)だけでなく、エントロピー流密度 \tilde{S} と温度勾配 ∇T_m との関係

$$\tilde{S} = \tilde{S}_\theta - (\kappa + \kappa_D^*) \frac{\nabla T_m}{T_m} \quad (4.5)$$

も重要です。

5.1 熱音響ヒートポンプの安定性

熱音響ヒートポンプ ($0 < \tilde{S} \nabla T_m \leq -W$) は強制振動なので、振動モード (角周波数 ω 、音響インピーダンス Z 、位相差 θ など) と振幅 $\sqrt{\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r}$ は実験者が決める。

先ず、 $\tilde{S} > 0$ となるのは

$$\nabla T_m < (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$$

の場合だけです。 $(\nabla T_m)_{\tilde{S}} > 0$ のためには

$$s_\theta > 0 \quad (4.6)$$

が必要です。

エントロピー生成最小の法則によれば、熱音響ヒートポンプが安定なのは

$$\nabla T_m < (\nabla T_m)_\sigma$$

の場合だけなので、熱音響ヒートポンプの安定性は $(\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ と $(\nabla T_m)_\sigma$ との大小関係に依存する。 $\nabla T_m < (\nabla T_m)_{\tilde{S}} < (\nabla T_m)_\sigma$ の場合には、 ∇T_m の増大は σ の減少を意味するので、熱音響ヒートポンプは安定です。しかし、 $(\nabla T_m)_\sigma < \nabla T_m < (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ の場合には ∇T_m の増大は σ の増大を意味するので、エントロピー生成最小の法則に抵触する。 $(\nabla T_m)_\sigma < \nabla T_m < (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ の場合の熱音響ヒートポンプは不安定です。

$\nabla T_m < (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ を満足する全ての温度勾配で熱音響ヒートポンプが安定動作するための必要条件は

$$0 < (\nabla T_m)_{\tilde{S}} < (\nabla T_m)_\sigma$$

です。ここで

$$(\nabla T_m)_{\tilde{S}} \equiv \frac{T_m \tilde{S}_\theta}{\kappa + \kappa_D^*} = \frac{1}{2} s_\theta^* \beta T_m \Gamma \quad (4.8)$$

と

$$(\nabla T_m)_\sigma \equiv \frac{1}{4} (w_\theta^* + s_\theta) \beta T_m \Gamma \quad (4.12)$$

とに注意すると、必要条件 $0 < (\nabla T_m)_{\tilde{S}} < (\nabla T_m)_\sigma$ は

$$s_\theta > 0 \quad (4.6)$$

かつ

$$w_\theta^* - s_\theta > 0 \quad (5.2)$$

と同じです。

しかし、熱音響ヒートポンプの運転範囲を人為的に $\nabla T_m \leq (\nabla T_m)_\sigma$ に制限するならば、 $(\nabla T_m)_\sigma < \nabla T_m < (\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ の場合を考慮する必要が無いので、安定な熱音響ヒートポンプの必要条件は(5.1)だけで良い。

5.2 安定な熱音響原動機の温度勾配と振幅

熱音響自励振動分岐はエントロピー流密度の大きさ $-\tilde{S} > 0$ の関数としての温度勾配 ∇T_m です。 $-\tilde{S} > 0$ と ∇T_m には有限の下限がある。 $-\tilde{S} > 0$ の下限に対応する ∇T_m の下限は臨界温度勾配 $(\nabla T_m)_W$ です。乾いた蓄熱器を使った熱音響自励振動の実験に依れば、 $-\tilde{S} > 0$ は $\sqrt{\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r}$ の二乗 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ に比例している。また、 ∇T_m は $-\tilde{S} > 0$ の増加関数だが $-\tilde{S} > 0$ 依存性が小さい。

熱音響原動機は自励振動なので、実験者が選べるのは振動モードとエントロピー流密度の大きさ $-\tilde{S} > 0$ だけです。振幅 $\sqrt{\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r}$ と温度勾配 ∇T_m は自然が選ぶ。このことに対応するのは、

$$\tilde{S} = \tilde{S}_\theta - (\kappa + \kappa_D^*) \frac{\nabla T_m}{T_m} \quad (4.5)$$

すなわち

$$-\tilde{S} = (\kappa + \kappa_D^*) \frac{\nabla T_m}{T_m} - \tilde{S}_\theta > 0 \quad (5.3)$$

を束縛条件として

$$\sigma = \sigma_A - (\kappa + \kappa_D^*) \frac{\nabla T_m}{T_m} \left[2 \frac{(\nabla T_m)_\sigma}{T_m} - \frac{\nabla T_m}{T_m} \right] \quad (4.11)$$

が最小となる $\sqrt{\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r}$ と ∇T_m の組み合わせを探す変分計算を行うことです。

変分計算は厄介なので、実験事実「 $-\tilde{S} > 0$ は $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ に比例している」つまり

$$-\tilde{S} \propto \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$$

をヒントに ∇T_m と $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ の組み合わせを探そう。

$$\tilde{S}_\theta = \frac{1}{2} s_\theta \beta \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r \quad (4.2)$$

によれば $\tilde{S}_\theta \propto \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ なので、(5.3)によれば、ヒント $-\tilde{S} \propto \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ は

$$(\kappa + \kappa_D^*) \nabla T_m \propto \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$$

を意味する。

他方で

$$(\nabla T_m)_\sigma \equiv \frac{1}{4} (w_\theta^* + s_\theta) \beta T_m \Gamma \quad (4.12)$$

$$\Gamma \equiv \frac{\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r}{\kappa + \kappa_D^*}$$

によれば

$$(\kappa + \kappa_D^*) (\nabla T_m)_\sigma = \frac{1}{4} (w_\theta^* + s_\theta) \beta T_m \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \propto \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

は $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ に比例している。従って

$$\nabla T_m \simeq (\nabla T_m)_\sigma \quad (5.4)$$

が期待される。(5.4)の場合には、(5.3)は

$$-\tilde{S} \simeq \frac{1}{4} (w_\theta^* - s_\theta) \beta \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (5.5)$$

です。

熱音響原動機 ($0 < W \leq -\tilde{S} \nabla T_m$) では $-\tilde{S} > 0$ なので、(5.5)によれば、

$$w_\theta^* - s_\theta > 0 \quad (5.2)$$

も必要です。

(5.4)と(5.5)とは乾いた蓄熱器を使った熱音響自励振動分岐の媒介変数表示です。媒介変数は $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ です。 $\kappa_D^* > \kappa$ では Γ の $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ 依存性が小さいことを考慮すると

$$(\nabla T_m)_\sigma \equiv \frac{1}{4} (w_\theta^* + s_\theta) \beta T_m \Gamma \quad (4.12)$$

は、 $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ 依存性が小さいので、 $-\tilde{S}$ 依存性も小さい。また、仮定(5.4)は安定な熱音響原動機の温度勾配は $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ が与えられた場合のエントロピー生成最小の法則に対応している。

最後に、(5.2)の場合には $(\nabla T_m)_{\tilde{S}} < (\nabla T_m)_\sigma$ なので、安定な熱音響原動機の温度勾配 $\nabla T_m = (\nabla T_m)_\sigma$ はヒートポンプの温度勾配の上限 $(\nabla T_m)_{\tilde{S}}$ あるいは人為的上限 $(\nabla T_m)_\sigma$ を越えることも無い。

5.3 安定な熱音響熱機関の必要条件

安定な熱音響熱機関の必要条件には振動モード（角周波数 ω 、音響インピーダンス Z 、位相差 θ など）に関わる

$$w_\theta^* + s_\theta > 0 \quad (5.1)$$

と

$$w_\theta^* - s_\theta > 0 \quad (5.2)$$

とがある。この二つは安定な熱音響ヒートポンプと安定な熱音響原動機とに共通な必要条件です。(5.1)は $\sigma_\theta < 0$ すなわち $(\nabla T_m)_\sigma > 0$ を意味する。また、(5.2)は、安定

な熱音響原動機では $-\tilde{S} > 0$ を意味し、安定な熱音響ヒートポンプでは $0 \leq (\nabla T_m)_{\tilde{S}} < (\nabla T_m)_{\sigma}$ を意味する。

しかし、熱音響ヒートポンプの運転範囲を人為的に $\nabla T_m \leq (\nabla T_m)_{\sigma}$ に制限するなら、安定な熱音響ヒートポンプの必要条件は(5.1)だけで良い。

第4章で議論したように、熱音響ヒートポンプでは $(\nabla T_m)_{\tilde{S}} > 0$ です。振動モードと振幅が決まると、

$$(\nabla T_m)_{\tilde{S}} \equiv \frac{T_m \tilde{S}_{\theta}}{\kappa + \kappa_D^*} = \frac{1}{2} s_{\theta} \beta T_m \Gamma \quad (4.8)$$

が決まる。熱音響ヒートポンプでは

$$s_{\theta} > 0 \quad (4.6)$$

が必要です。

第3章で議論したように、熱音響原動機では、 $(\nabla T_m)_W > 0$ です。振動モードが決まると、

$$(\nabla T_m)_W \equiv \frac{-2W_A}{w_{\theta}^* \beta \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r} \quad (3.14)$$

あるいは

$$(\nabla T_m)_W = \frac{\omega}{w_{\theta}^* \beta} \left[\Im \left(\frac{1}{1 - \chi_{\nu}^{\dagger}} \right) \frac{\rho_m}{Z} + \Im \chi_{\alpha}^{\dagger} (\gamma - 1) K_S Z \right] \quad (3.15)$$

が決まる。熱音響原動機では

$$w_{\theta}^* > 0 \quad (3.16)$$

が必要です。

安定な熱音響原動機 $(\nabla T_m = (\nabla T_m)_{\sigma})$ の温度勾配 $\nabla T_m = (\nabla T_m)_{\sigma} > 0$ には下限と上限とがある。熱音響原動機の温度勾配には、振動モードに依存する下限 $(\nabla T_m)_W > 0$ がある：

$$(\nabla T_m)_{\sigma} > (\nabla T_m)_W$$

また、熱力学第二法則 $(\sigma \geq 0)$ により、

$$(\nabla T_m)_\sigma \leq T_m \sqrt{\frac{\sigma_A}{\kappa + \kappa_D^*}} \quad (4.13)$$

も必要です。(4.13)の右辺は $(\nabla T_m)_\sigma$ の上限です。 $\kappa_D^* > \kappa_D$ なので、 $(\nabla T_m)_\sigma$ の上限は乾いた蓄熱器よりも濡れた蓄熱器のほうがよりも小さい。

(4.12)によれば、 $(\nabla T_m)_\sigma > 0$ は $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ の増加関数です。このために、 $(\nabla T_m)_\sigma$ の振動モードに依存する下限 $(\nabla T_m)_W$ と上限 $T_m \sqrt{\sigma_A / (\kappa + \kappa_D^*)}$ とは安定な熱音響原動機の $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ の下限と上限とに対応する。

(5.5)によれば、安定な熱音響原動機のエントロピー流密度の大きさ $-\tilde{S} > 0$ は $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ の増加関数です。このために、安定な熱音響原動機の $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ の下限と上限とはエントロピー流密度の大きさ $-\tilde{S} > 0$ の下限と上限とに対応する。

$\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ や $-\tilde{S} > 0$ の下限は $W > 0$ の表れであり、 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ や $-\tilde{S} > 0$ の上限は熱力学第二法則 ($\sigma_{\min} \geq 0$) の表れです。

$\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ や $-\tilde{S} > 0$ が熱力学第二法則で決まる上限を越えると、別の振動モードへとモード転移することがある。熱音響自励振動では、角周波数 2ω 程度の振動モードへの転移が観測されることが多い。熱音響自励振動では、二つの振動モードが同時に観測されることもある。蓄熱器の全長が同時にモード転移するとは限らないのだろう。

5.4 安定な熱音響熱機関の位相差

安定な熱音響熱機関の必要条件

$$w_\theta^* + s_\theta > 0 \quad (5.1)$$

と

$$w_\theta^* - s_\theta > 0 \quad (5.2)$$

とを使って安定な熱音響熱機関の位相差 θ の範囲を議論しよう。

濡れた蓄熱器では

$$w_\theta^* \equiv \left(1 + c_{mol} \frac{L}{C_p \Theta_V} \right) w_\theta \quad (3.13)$$

を思い出そう。

乾いた蓄熱器 ($p_{mV} = 0$) では、必要条件(5.1)と(5.2)とは、それぞれ、

$$w_\theta + s_\theta > 0 \quad (5.6)$$

と

$$w_\theta - s_\theta \geq 0 \quad (5.7)$$

です。

乾いた蓄熱器 ($p_{mV} = 0$) の場合から始めて、その後に濡れた蓄熱器 ($p_{mV} > 0$) を議論する。

5.4.1 乾いた蓄熱器の位相差の範囲

まず

$$w_\theta \equiv |\langle h \rangle_r| \sin(\theta - \arg\langle h \rangle_r) = \Re\langle h^\dagger \rangle_r \sin\theta + \Im\langle h^\dagger \rangle_r \cos\theta \quad (3.9)$$

と

$$s_\theta \equiv -|\langle g^\dagger \rangle_r| \sin(\theta - \arg\langle g^\dagger \rangle_r) = -\Re\langle g^\dagger \rangle_r \sin\theta + \Im\langle g^\dagger \rangle_r \cos\theta \quad (4.3)$$

とを思い出し、粗い近似

$$\langle g^\dagger \rangle_r \simeq \langle h^\dagger \rangle_r$$

を使うと

$$w_\theta + s_\theta \simeq 2\Im\langle h^\dagger \rangle_r \cos\theta \quad (5.8)$$

と

$$w_\theta - s_\theta \simeq 2\Re\langle h^\dagger \rangle_r \sin\theta \quad (5.9)$$

です。

図5.2に $\langle h^\dagger \rangle_r$ の $\omega\tau_\alpha$ 依存性を示す。この図から、実部 $\Re\langle h^\dagger \rangle_r > 0$ と虚部 $\Im\langle h^\dagger \rangle_r > 0$ だけでなく、 $\arg\langle h^\dagger \rangle_r = -\arg\langle h \rangle_r$ の $\omega\tau_\alpha$ 依存性も読み取ることが出来る。

$w_\theta + s_\theta > 0$ を大きくするには、(5.8)によれば、 $\Im\langle h^\dagger \rangle_r$ が大きくなるように $\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ とし、 $\cos\theta$ が大きくなるように $\theta \simeq 0$ を選ぶ。いずれも、タコニス振動やソンドハウス管などの熱音響自励振動や共鳴管冷凍機などの乾いた蓄熱器を使う熱音響現象の経験事実に対応している。

位相差 θ だけに着目する。

乾いた蓄熱器で $s_\theta < 0$ となる必要条件(5.6)に(5.8)を使うと

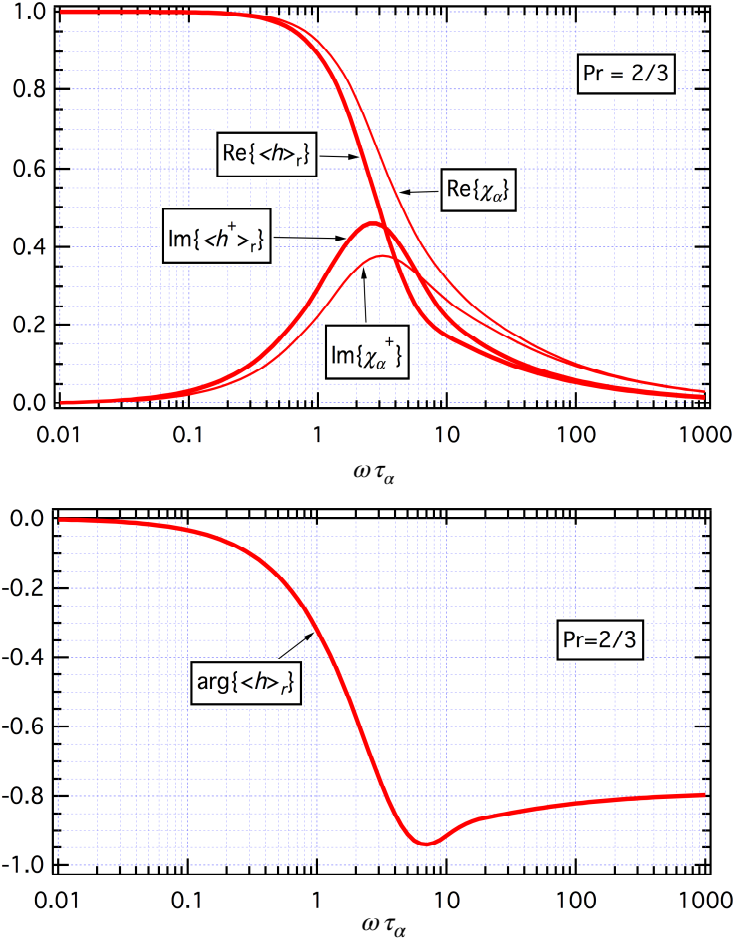


図5.2 $\langle h \rangle_r$ の $\omega \tau_\alpha$ 依存性：プラントル数の値が2/3の場合です。比較のために χ_α も載せた。 h^\dagger は h の複素共役なので、 $\Im\langle h^\dagger \rangle_r > 0$ です。 $\langle h \rangle_r$ の位相角 $\arg\langle h \rangle_r$ は負で、 $\omega \tau_\alpha$ が大きい所では $-\pi/4$ に漸近する。 $\omega \tau_\alpha \simeq \pi$ で $\arg\langle h \rangle_r \simeq -\pi/4$ です。

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (5.10)$$

となり、必要条件(5.7)に(5.9)を使うと

$$0 < \theta < \pi \quad (5.11)$$

となる。(5.10)と(5.11)との共通部分は

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (5.12)$$

です。

乾いた蓄熱器が熱音響原動機 ($0 < W \leq -\tilde{S} \nabla T_m$) として動作するには

$$-\arg\langle h^\dagger \rangle_r < \theta < \pi - \arg\langle h^\dagger \rangle_r \quad (3.17)$$

が必要でしたが、(5.12)は(3.17)の範囲内なので、(3.17)は不要です。

乾いた蓄熱器が熱音響ヒートポンプ ($0 < \tilde{S} \nabla T_m \leq -W$) として動作するためには

$$-\pi + \arg\langle g^\dagger \rangle_r < \theta < \arg\langle g^\dagger \rangle_r \quad (4.7)$$

が必要です。(4.7)と(5.12)との共通部分は

$$0 < \theta < \arg\langle g^\dagger \rangle_r \quad (5.13)$$

です。

ただし、熱音響ヒートポンプの運転範囲を人為的に狭くして温度勾配 ∇T_m の上限を $(\nabla T_m)_\sigma$ とするなら、(5.11)は不要です。熱音響ヒートポンプは(5.10)だけで安定です。(4.7)と(5.10)との共通部分は

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \arg\langle g^\dagger \rangle_r$$

です。このほうが現実的です。

5.4.2 濡れた蓄熱器の位相差の範囲

濡れた蓄熱器が熱音響熱機関として安定動作する位相差の範囲は飽和蒸気圧 p_{mV} に依存し、 c_{mol} が1に近づくにつれて、 w_θ^* が大きくなる。このために、

$$w_\theta^* + s_\theta > 0 \quad (5.1)$$

と

$$w_\theta^* - s_\theta > 0 \quad (5.2)$$

とは c_{mol} が1に近づくにつれて

$$w_\theta^* > 0$$

に近づく。 $w_\theta^* > 0$ は $w_\theta > 0$ と同じなので、濡れた蓄熱器が安定な熱音響原動機として安定動作するための必要条件と同じ

$$-\arg\langle h^\dagger \rangle_r < \theta < \pi - \arg\langle h^\dagger \rangle_r \quad (2.11)$$

です。

$s_\theta \neq 0$ なので、濡れた蓄熱器が熱音響熱機関として安定動作する位相差の範囲は(2.11)より狭い。それでも乾いた蓄熱器が安定な熱音響原動機として安定動作するための必要条件

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (5.12)$$

に比べれば位相差の範囲が広い。

濡れた蓄熱器が熱音響ヒートポンプとして安定動作する位相差の範囲は、その必要条件 $s_\theta > 0$ により、

$$-\pi - \arg\langle g^\dagger \rangle_r < \theta < \arg\langle g^\dagger \rangle_r \quad (4.7)$$

です。(4.7)と(2.11)との共通部分は

$$-\arg\langle h^\dagger \rangle_r < \theta < \arg\langle g^\dagger \rangle_r$$

です。これも乾いた蓄熱器の

$$0 < \theta < \arg\langle g^\dagger \rangle_r \quad (5.13)$$

より広い。

さらに、熱音響ヒートポンプの運転範囲を狭くして $(\nabla T_m)_\sigma$ を温度勾配 ∇T_m の上限とするなら、(2.11)が不要なので、熱音響ヒートポンプは(4.7)だけで安定です。

いずれにしても蓄熱器が熱音響熱機関として安定動作する位相差の範囲は乾いた蓄熱器よりも濡れた蓄熱器のほうが広い。従って、乾いた蓄熱器よりも濡れた蓄熱器のほうが位相差の自由度が高い。

[参考]

濡れた蓄熱器に関わる数理的論文には、ミシシッピ大学のグループによる次の二論文（2002年）がある。

R. Raspet et al : Theory of inert gas-condensing vapor thermoacoustics: Propagation equation, J. Acoust. Soc. Am. **112** (4), 2002 pp.1414-1422

W. V. Slaton et al : Theory of inert gas-condensing vapor thermoacoustics: Transport equations, J. Acoust. Soc. Am. **112** (4), 2002 pp.1423-1430

前者は流体の振動運動を議論している。数式が多く、概念的理解が容易でない。前者に基づき振動運動によるエンタルピー流密度を議論しているのが後者です。どちらの論文にも仕事源やエントロピー生成密度についての議論が見当たらない。

濡れた蓄熱器の仕事源に関わる実験的論文に東海大学グループによる次の論文（2021年）がある。丁寧で説得力のある実験です。

M. Senga and S. Hasegawa : Energy conversion of thermoacoustic engines with evaporation and condensation, International Journal of Heat and Mass Transfer **165**, (2021) 120385

2022年8月19日（金）