

熱音響現象：私の理解

改定第4版

富永 昭

目次

第1章 定常状態の輸送現象	5
1.1 質量保存則とエネルギー保存則	5
1.2 原動機の効率	7
1.3 エントロピー流とエントロピー生成	11
1.4 定常状態の分類	15
第2章 周期的定常状態の輸送現象	19
2.1 仕事流と仕事流密度	20
2.2 エントロピー流とエントロピー流密度	20
2.3 エネルギー流密度	21
2.4 熱から仕事へのエネルギー変換	22
2.5 仕事流、エントロピー流、エネルギー変換の幾何学的関係	25
第3章 熱音響理論：微視的階層	28
3.1 微視的階層と粗視的階層	28
3.1.1 線形近似：オイラーの視点とラグランジュの視点	29
3.1.2 線形近似：時刻依存性の複素表示	31
3.2 管内流体の振動運動：拡張キルヒホッフ理論	32
3.2.1 運動量保存則	32
3.2.2 質量保存則	39
3.2.3 流体物理学のエネルギー保存則：熱輸送の一般式	41
3.2.3.1 温度変動	42
3.2.3.2 エントロピー変動とその応用	46
3.3 一様温度の場合：キルヒホッフ理論	48

3.3.1 管内音波の分散	48
3.3.2 2センサー法	52
3.3.3 波動方程式と拡散方程式	54
第4章 熱音響理論：粗視的階層	57
4.1 仕事源	59
4.1.1 仕事源に特徴的な温度勾配	63
4.2 エントロピー流密度	65
4.2.1 エントロピー流密度に特徴的な温度勾配	70
4.2.2 ドリームパイプの必要条件	71
4.3 エントロピー流密度と温度勾配との関係	71
4.4 数値計算による軸方向シミュレーション	72
4.5 スターリング機関の伝統的理解	76
第5章 エントロピー生成とエントロピー生成最小の法則	81
5.1 熱音響現象のエントロピー生成密度	83
5.2 強制振動のエントロピー生成密度	88
5.2.1 熱音響ヒートポンプの安定性	89
5.2.2 共鳴管の共鳴周波数：周波数掃引	91
5.3 熱音響自励振動とエントロピー生成最小の法則	92
5.3.1 熱音響自励振動の束縛条件	94
5.3.2 エントロピー生成密度最小の条件	95
5.3.3 熱音響自励振動分岐の振幅の二乗	99
5.3.4 熱音響自励振動分岐の温度勾配	101
5.3.5 熱音響自励振動分岐のエントロピー生成密度	103
第6章 非線形性と吸放熱器	107
6.1 キルヒホッフ理論のモデル：線形性	107
6.2 拡張キルヒホッフ理論のモデル：線形性	108
6.3 蓄熱器両端での吸放熱と吸放熱器	109
付録： 第一種ベッセル関数J_nとその管内音波への応用	112

A1	ベッセル関数の数学公式	112
A1.1	階乗	112
A1.2	第一種ベッセル関数 J_n の級数展開表示	113
A1.3	ベッセル関数 J_n の積分表示	113
A1.4	微分公式	114
A1.5	漸化式	115
A1.6	不定積分	115
A1.7	定積分	116
A2.	管内音波への応用	117
	あとがき	120

熱音響現象は温度勾配のある狭い流路の中で流体が振動運動することに伴うエネルギーなどの輸送現象です。温度勾配のある狭い流路の代表が蓄熱器です。熱音響現象には、熱音響自励振動あるいは原動機とヒートポンプのような熱機関だけでなく、熱機関以外ではドリムパイプなどがある。ヒートポンプとドリムパイプは強制振動だが、熱音響自励振動あるいは原動機は自励振動です。

スターリング機関の伝統的議論と熱音響理論とでは着目点が違う。スターリング機関の伝統的議論では、熱力学的サイクル議論に終始し、蓄熱器を研究対象とすることを避けた。熱音響現象を理解することを目指した熱音響理論は主に蓄熱器を研究対象とした。

熱音響理論は、二つの階層から成る。狭い流路中での流体の振動運動を議論する流体物理学的階層と流体の振動運動に伴う輸送現象を議論する熱力学的階層である。流体力学は、17世紀のニュートン力学を連続体に拡張することから始まったので、概念的理解は容易です。19世紀にその基礎が出来た熱力学は、馴染みの薄い概念が多いが、数式表現は容易です。

第1～2章は熱音響理論の序章です。定常状態の輸送現象に関わる熱力学的議論（第1章）から始めて、周期的定常状態の輸送現象（第2章）を議論する。蓄熱器を軽視するサイクル理論と蓄熱器を重視する熱音響理論との基本的相違は蓄熱器中を往復運動する流体の温度振幅と変位振幅の大きさにあることも指摘する。

20世紀末までの熱音響理論については第3～4章で述べる。管内流体の流体物理学的議論（第3章）では一様温度の場合も議論する。管内流体の流体物理学的議論に基づき熱力学的議論（第4章）を行う。第4章では熱音響理論に基づく数値計算によるシミュレーション手順の一例を紹介する。第4章の最後に、スターリング機関の伝統的議論は、振幅の相違だけでなく、熱音響理論の非粘性かつ低周波数の極限に近いことを示す。

熱音響理論のその後の進展については第5～6章で述べる。エントロピー生成最小の法則を使うことで熱音響現象の熱力学的安定性と熱音響自励振動（第5章）を議論する。熱音響理論の問題点である非線形性と吸放熱器との関係については第6章で議論する。

第1章 定常状態の輸送現象

定常状態は、平衡状態と同様に、時刻に依存しない。定常流すら存在しない定常状態は平衡状態です。同じことだが、平衡状態ではない定常状態は、何らかの定常流が有限です。例えば、外界から水素と酸素が供給され、白金触媒のもとで水を生成して外界に放出する燃料電池などでは、水素と酸素が吸い込まれ、水と反応熱と電気エネルギーが湧き出す。

この章では定常状態の熱力学第一法則と熱力学第二法則について述べる。定常状態の熱力学第一法則は、エネルギー流に関わる経験則から始まり、定常状態の熱力学第二法則は、エントロピー流に関わる経験則から始まった。エネルギー流とエントロピー流は、それぞれ、エネルギー輸送とエントロピー輸送です。

1.1 質量保存則とエネルギー保存則

古典物理の対象は反応エネルギーの小さい現象です。反応エネルギーの小さい現象では質量保存則と運動量保存則とエネルギー保存則とが重要な3経験則です。質量保存則と運動量保存則とが基本法則である古典的純粋力学では力学的エネルギーについてのエネルギー保存則が自動的に成り立つ。18世紀の流体力学では、古典的純粋力学と同様に質量保存則と運動量保存則が基本法則です。

19世紀前半にエネルギー流概念を拡張し、熱流もエネルギー流の仲間と認識することで、新しいエネルギー保存則が認識された。これが初期の熱力学第一法則です。なお、原子核反応のように反応エネルギーの大きい現象では、古典物理とは異なり、質量もエネルギーの仲間とみなす拡張されたエネルギー保存則が成り立つ。

熱音響現象は、エネルギー反応の小さい現象なので、独立な保存則は質量保存則と運動量保存則と熱力学第一法則の3保存則です。

質量保存則の数式表現

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = 0$$

は、流体力学では連続の式と呼ばれている。密度 ρ の流体が流速 u で移動する際に単位面積を通過する単位時間あたりの質量すなわち質量流密度は ρu です。右辺のゼロは質量生成密度の値がゼロ、すなわち、質量が不生不滅であることを意味する。定

常状態 $\partial\rho/\partial t = 0$ では質量流密は湧き出すことも吸い込まれることもない：
 $\nabla(\rho u) = 0$ 。このように、保存則は関わりのある生成密度の値がゼロであることを主張する経験則です。

エネルギー概念の拡張は仕事流だけでなく熱流もエネルギー流の仲間と認識することから始まった。エネルギーという用語を初めて使いエネルギー概念の確立に寄与したのは、ヤングの実験を根拠に光の波動説を唱え、ヤング率に名を残したトマス ヤング (1773-1829年) とされる。仕事流密度 \tilde{I} は単位時間に単位面積を通過する力学的エネルギーであり、熱流密度 \tilde{Q} は単位時間に単位面積を通過する熱エネルギーです。 \tilde{I} と \tilde{Q} には単位時間に単位面積を通過するエネルギーという共通点があるので、両者の和

$$\tilde{E} \equiv \tilde{I} + \tilde{Q}$$

をエネルギー流密度と呼ぶ。

定常状態では、エネルギー流密度 \tilde{E} は湧き出すことも吸い込まれることもない。つまり、エネルギー流密度 \tilde{E} は一様です：

$$\nabla \tilde{E} = 0 \tag{1.1}$$

これは定常状態でのエネルギー保存則あるいは熱力学第一法則の最初の定式化です。

エネルギー密度 ρU に着目し、定常状態 ($\partial(\rho U)/\partial t = 0$) でのエネルギー保存則 (1.1) を非定常状態 ($\partial(\rho U)/\partial t \neq 0$) へ拡張すると

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla \tilde{E} = 0$$

です。右辺のゼロは、エネルギーが不生不滅であることすなわちエネルギー生成密度の値がゼロであることを意味する。熱力学第一法則は、エネルギー生成密度の値がゼロという経験則です。

定常状態の熱力学第一法則(1.1)を書き換えると

$$\nabla \tilde{I} + \nabla \tilde{Q} = 0 \tag{1.2}$$

です。(1.2)は、熱流密度 \tilde{Q} と仕事流密度 \tilde{I} との相互変換を意味するので、熱機関で重要です。原動機では、 \tilde{Q} が吸い込まれるとともに \tilde{I} が湧き出す： $\nabla \tilde{Q} < 0$ かつ

$\nabla \tilde{I} > 0$ 。逆に、ヒートポンプでは、 \tilde{I} が吸い込まれるとともに \tilde{Q} が湧き出す：
 $\nabla \tilde{I} < 0$ かつ $\nabla \tilde{Q} > 0$ 。

1.2 原動機の効率

以下の議論では、座標軸（z軸）の正方向は、温度勾配が正になるように選ぶ。

1824年にSadi カルノー（1796-1832年）は原動機の効率

$$\eta \equiv \frac{\tilde{I}_H - \tilde{I}_C}{-\tilde{Q}_H} = \frac{-\tilde{Q}_H + \tilde{Q}_C}{-\tilde{Q}_H} \quad (1.3)$$

を導入した。添え字は、Hが高温部で、Cは低温部を表す。右辺の分母 $-\tilde{Q}_H > 0$ は熱流の高温部での大きさで、分子

$$\tilde{I}_H - \tilde{I}_C = -\tilde{Q}_H + \tilde{Q}_C > 0 \quad (1.4)$$

は原動機の仕事に対応する。なお、当時の原動機は外燃機関です。外燃機関では、蒸気機関のように、高温部（ボイラー）と低温部（凝縮器）とが明確です。

原動機の効率 η という概念は定常状態での熱力学第一法則に基づいている。高温部と低温部のエネルギー流を、それぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{E}_H &\equiv \tilde{Q}_H + \tilde{I}_H \\ \tilde{E}_C &\equiv \tilde{Q}_C + \tilde{I}_C \end{aligned}$$

とすると、(1.4)は $\tilde{E}_C = \tilde{E}_H$ を意味するからです。カルノーは、熱力学第一法則が未だ認識されていない熱学の絶頂期に、定常状態の熱力学第一法則を先取りしたことになる。

原動機の効率 η の仕事流表示は

$$\eta \equiv \frac{\tilde{I}_H - \tilde{I}_C}{-\tilde{Q}_H} = \frac{\tilde{I}_H - \tilde{I}_C}{\tilde{I}_H - \tilde{E}} = \frac{\tilde{I}_H}{\tilde{I}_H - \tilde{E}} \cdot \eta_0 \quad (1.5)$$

ただし

$$E \equiv E_H = E_C$$

であり、

$$\eta_0 \equiv \frac{\tilde{I}_H - \tilde{I}_C}{\tilde{I}_H} = 1 - \frac{\tilde{I}_C}{\tilde{I}_H} > 0$$

は $\tilde{E} = 0$ の場合の効率です。 $\tilde{E} > 0$ の場合には $\eta > \eta_0$ なので原動機の効率には下限 η_0 が存在するが、 $\tilde{E} < 0$ の場合には $\eta < \eta_0$ なので原動機の効率には上限 η_0 が存在する。

熱機関のエネルギー流密度 $\widetilde{E} \equiv \widetilde{I} + \widetilde{Q}$ を議論する。

定常状態の熱力学第一法則(1.1)ではエネルギー流密度 \widetilde{E} の符号は不定だが、経験によれば、原動機では $\widetilde{E} \leq 0$ です。原動機の効率の仕事流表示と原動機の効率には下限が無いが上限が存在するという経験事実によれば原動機では $\widetilde{E} \leq 0$ です。

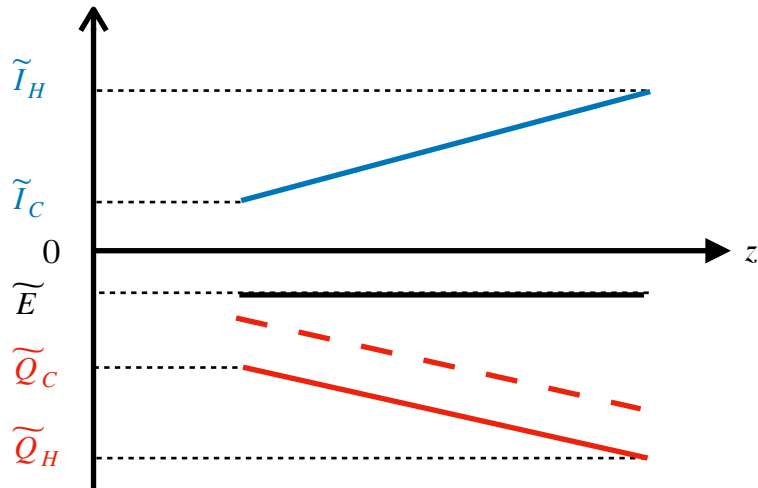


図1.1a 原動機の場合の熱流密度 \widetilde{Q} と仕事流密度 \widetilde{I} とエネルギー流密度 \widetilde{E} の軸方向分布例：横軸は位置座標。破線は $\widetilde{E} = 0$ の場合の熱流。

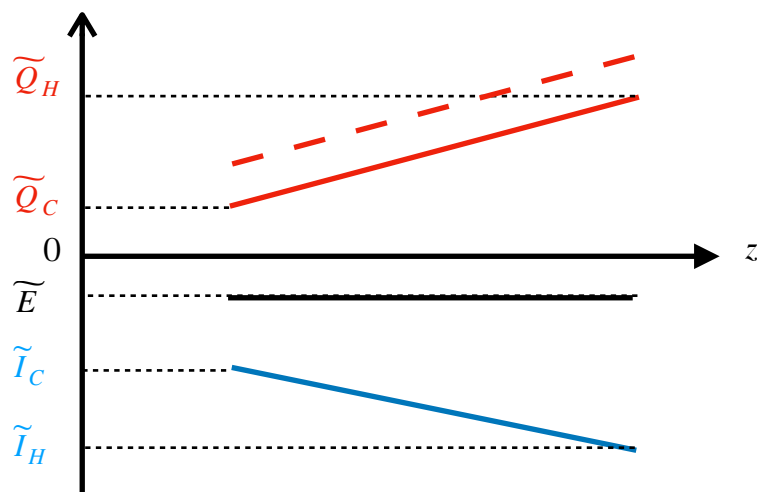


図1.1b ヒートポンプの場合の熱流密度 \widetilde{Q} と仕事流密度 \widetilde{I} とエネルギー流密度 \widetilde{E} の軸方向分布例：横軸は位置座標。破線は $\widetilde{E} = 0$ の場合の熱流。

原動機の場合の熱流密度 $\widetilde{Q} < 0$ と仕事流密度 $\widetilde{I} > 0$ とエネルギー流密度 $\widetilde{E} < 0$ の軸方向分布例を図1.1aに模式的に示した。原動機の熱流密度の大きさ $-\widetilde{Q} > 0$ は仕事流密度 $\widetilde{I} > 0$ よりも $-\widetilde{E} \geq 0$ だけ大きい。原動機では、高温部から低温部へ向かう熱流密度 $\widetilde{Q} < 0$ の一部分だけが $\widetilde{I} > 0$ に変換されて出力されるので、 $\widetilde{E} < 0$ です。 $\widetilde{E} < 0$ は原動機にとって無駄なエネルギー流密度です。

ヒートポンプの場合の熱流密度 $\widetilde{Q} > 0$ と仕事流密度 $\widetilde{I} < 0$ とエネルギー流密度 $\widetilde{E} < 0$ の軸方向分布例を図1.1bに模式的に示した。ヒートポンプの熱流密度 $\widetilde{Q} > 0$ は仕事流密度の大きさ $-\widetilde{I} > 0$ よりも $-\widetilde{E} \geq 0$ だけ小さい。ヒートポンプでは、高温部から低温部へ向かう仕事流密度 $\widetilde{I} < 0$ の一部分だけが熱流 $\widetilde{Q} > 0$ に変換されて出力されるので、 $\widetilde{E} < 0$ です。 $\widetilde{E} < 0$ はヒートポンプにとっても無駄なエネルギー流密度です。

従って、熱機関では $\widetilde{E} \leq 0$ です。さらに、 $\widetilde{E} \leq 0$ の値は、位置 z に依らない。この意味で、熱機関の $\widetilde{E} \leq 0$ は、例えば熱伝導に伴う熱流密度のような、位置に依らない無駄な熱流密度 $\widetilde{Q}_{waste} \leq 0$ です。

位置に依らない無駄な熱流密度 $\widetilde{Q}_{waste} \leq 0$ に着目すると、熱機関のバイパスモデルを想定することが出来る。熱機関のバイパスモデルは $\widetilde{E} = 0$ の熱機関の高温端と低温端とを熱伝導度 $\kappa_{bypass} \geq 0$ が有限の材料でバイパスしたものであり $\widetilde{Q}_{waste} = -\kappa_{bypass} \nabla T \leq 0$ です。

原動機の効率 η の仕事流表示(1.5)は、エネルギー流密度 $\widetilde{E} \leq 0$ を無駄な熱流密度 $\widetilde{Q}_{waste} \leq 0$ に置き換えて、

$$\eta \equiv \frac{\widetilde{I}_H - \widetilde{I}_C}{-\widetilde{Q}_H} = \frac{\widetilde{I}_H - \widetilde{I}_C}{\widetilde{I}_H - \widetilde{Q}_{waste}} = \frac{\widetilde{I}_H}{\widetilde{I}_H - \widetilde{Q}_{waste}} \cdot \eta_0$$

です。 η の値を評価するには、 \widetilde{I}_H と \widetilde{I}_C と $\widetilde{Q}_H < 0$ あるいは $\widetilde{Q}_{waste} = -\kappa_{bypass} \nabla T$ とが必要
です。

蓄熱器が熱音響熱機関として機能している場合には \widetilde{I}_H と \widetilde{I}_C は2センサー法などを使って推定可能なので、原動機の効率 η を求めるには $\widetilde{Q}_H < 0$ あるいは $\widetilde{Q}_{waste} = -\kappa_{bypass} \nabla T$ を推定すればよい。2センサー法については第3章で述べる。

$\widetilde{Q}_{waste} = -\kappa_{bypass} \nabla T$ を推定することは容易です。放射などで高温部から逃げていく熱流を推定することが困難なので、原動機として機能している蓄熱器では、 $\widetilde{Q}_H < 0$ を評価することは容易でない。

しかし、 κ_{bypass} が蓄熱器の熱伝導度 κ だけなら、熱伝導度 κ と温度勾配 ∇T を使って $\widetilde{Q}_H < 0$ を評価できる。蓄熱器の熱伝導度 κ を計測することが望ましいが、蓄熱器の構成材料の熱伝導度から推定することも出来る。なお、蓄熱器を構成している金属の熱伝導度についてはヴィーデマン・フランツ則〔1853年）や金属電子論のローレンツ数（1872年）も参考になる。

κ_{bypass} が蓄熱器の熱伝導度 κ だけではない $\kappa_{bypass} = \kappa + \kappa^*$ の場合を議論する。熱伝導度 κ 以外の仮想熱伝導度 κ^* による無駄な熱流

$$\widetilde{Q}_{waste}^* \equiv -\kappa^* \nabla T$$

を使うと

$$\widetilde{Q}_{waste} = -\kappa_{bypass} \nabla T = -\kappa \nabla T + \widetilde{Q}_{waste}^*$$

です。

蓄熱器にこのバイパスモデルを適用すると、 $\widetilde{Q}_{waste} < 0$ の実験的評価が可能です。 $\widetilde{Q}_{waste}^* < 0$ は蓄熱器内の流体が振動している場合のみ存在する無駄なエネルギー流密度なので、温度勾配 ∇T が同じで、蓄熱器が原動機として機能している場合と流体が静止している場合との高温部のヒーターパワーの差を流路面積で割ったものを $-\widetilde{Q}_H^* > 0$ とすると

$$\widetilde{Q}_{waste}^* = \widetilde{I}_H + \widetilde{Q}_H^* < 0$$

です。従って

$$\widetilde{Q}_{waste} = \widetilde{Q}_{waste}^* - \kappa \nabla T = \widetilde{I}_H + \widetilde{Q}_H^* - \kappa \nabla T$$

です。

これを使うと

$$-\widetilde{Q}_H = \widetilde{I}_H - \widetilde{Q}_{waste} = -\widetilde{Q}_H^* + \kappa \nabla T$$

です。

こうして、バイパスモデルを使うと原動機として機能している蓄熱器の効率 η が評価できる。

1.3 エントロピー流とエントロピー生成

1848年論文で熱力学的温度 $T > 0$ を導入し温度目盛りに名を残したケルヴィン卿トムソン (1824-1907年) には次に紹介する二つの悩みがあった。

トムソンの第一の悩みは仕事流密度 \tilde{I} と熱流密度 \tilde{Q} との相違点です。 \tilde{I} と \tilde{Q} とは、エネルギー流密度という共通点があるが、どこかが違う。何が違うのか？

トムソンの第二の悩みは仕事流密度 \tilde{I} と熱流密度 \tilde{Q} との相互変換の非対称性です。定常状態の熱力学第一法則

$$\nabla \tilde{I} + \nabla \tilde{Q} = 0 \quad (1.2)$$

は \tilde{I} と \tilde{Q} との相互変換を意味するけれど、 \tilde{I} と \tilde{Q} との相互変換は非対称です。例えば、摩擦熱では、 \tilde{I} の全てを \tilde{Q} に変換することが可能ですが、原動機では、 \tilde{Q} はその一部分だけが \tilde{I} に変換される (S. カルノー 1824年) : 熱機関の経験則 $\tilde{E} \leq 0$ 。

トムソンの悩みを解決したのはクラウジウス (1822-88年) の1850年論文です。この論文で、クラウジウスは、新しい熱力学的輸送量としてエントロピー流密度 \tilde{S} を導入し、クラウジウスの不等式と呼ばれる新しい経験則

$$\nabla \tilde{S} \geq 0$$

を提案した。

エントロピー流密度 \tilde{S} が熱力学的温度 T の面を通り抜ける場合の熱流密度は

$$\tilde{Q} = T\tilde{S}$$

であるとした。これがクラウジウスによるエントロピー流密度 \tilde{S} の導入です。

\tilde{Q} と \tilde{I} との相違は温度 T やエントロピー流密度 \tilde{S} との関わりの相違です。純粋力学には温度やエントロピー流密度などの概念が無い。力学的エネルギー流密度でもある仕事流密度 \tilde{I} は温度 T やエントロピー流密度 \tilde{S} と関わりが無い。 T や \tilde{S} と密接な関わりがある \tilde{Q} は \tilde{I} とは明らかに違う。こうしてトムソンの第一の悩みが解決した。

エントロピー流密度 \tilde{S} の導入により、エネルギー流密度の定義は

$$\tilde{E} \equiv \tilde{I} + T\tilde{S}$$

に変わり、定常流の熱力学第一法則(1.2)は

$$\nabla \tilde{I} + \tilde{S} \nabla T + T \nabla \tilde{S} = 0$$

に変わった。

相互変換の非対称性の鍵は $\nabla\tilde{S}$ の符号です。クラウジウスの不等式によれば \tilde{S} の符号に関わらず $\nabla\tilde{S} \geq 0$ です。エネルギー変換の際に符号を変えない無駄なエネルギー変換 $T\nabla\tilde{S} \geq 0$ が存在することを意味する。例えば、摩擦熱では、 $\nabla T \approx 0$ が良い近似なので、 $\nabla\tilde{Q} \approx T\nabla\tilde{S} \geq 0$ です。こうして、トムソンの第二の悩みも解決された。

クラウジウスの不等式 $\nabla\tilde{S} \geq 0$ はエントロピー流増大則です。 $\nabla\tilde{S} \geq 0$ によれば、定常状態のエントロピー流密度 \tilde{S} は、湧き出すことはあるが、吸い込まれることはないからです。

原動機の効率という概念を導入したカルノーが効率を議論した時の「無駄の発生」は $\nabla\tilde{S} > 0$ に対応し、経験によれば全ての機械には多少とも無駄が発生するので、理想的熱機関とは無駄の発生しない $\nabla\tilde{S} = 0$ の熱機関としている。エントロピー流増大則が未だ認識されていない熱学の絶頂期に原動機の効率には温度で決まる上限があることに気付いたカルノーはエントロピー流増大則をも先取りしたことになる。

原動機の効率 η のエントロピー流表示は、(1.3)により、

$$\eta \equiv \frac{(-\tilde{S}_H T_H) - (-\tilde{S}_C T_C)}{-\tilde{S}_H T_H} = 1 - \frac{\tilde{S}_C}{\tilde{S}_H} \frac{T_C}{T_H} \leq \eta_{Carnot} \quad (1.6)$$

ただし

$$\eta_{Carnot} \equiv 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

はSadi カルノーに敬意を表してカルノー効率と呼ばれている。最後の不等号はエントロピー流増大則

$$-\tilde{S}_C \geq -\tilde{S}_H$$

あるいは

$$\frac{\tilde{S}_C}{\tilde{S}_H} \geq 1$$

の現れです。等号は理想的熱機関 $\nabla\tilde{S} = 0$ の場合です。

効率 η の仕事流表示(1.5)とエントロピー流表示(1.6)とは表現が異なるが、理想気体では

$$\eta_0 = \eta_{Carnot}$$

です。高温部から低温部へむかう無駄なエネルギー流 $\widetilde{E} \leq 0$ はエントロピー流増大則の表れです。

熱機関のバイパスモデルでは、バイパスでのエントロピー流密度は

$$\widetilde{S}_{bypass} = \frac{\widetilde{Q}_{waste}}{T} \leq 0$$

なので、

$$\nabla \widetilde{S}_{bypass} = \frac{-\widetilde{Q}_{waste}}{T} \frac{\nabla T}{T} \geq 0$$

です。理想的熱機関 $\nabla \widetilde{S} = 0$ では、 $\widetilde{Q}_{waste} = 0$ なので、 $\nabla \widetilde{S}_{bypass} = 0$ です。

バイパス全体でのエントロピー生成は、バイパスでのエントロピー生成 $\nabla \widetilde{S}_{bypass}$ をバイパスの全長に渡り積分して、

$$-\widetilde{Q}_{waste} \left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_H} \right) = \frac{-\widetilde{Q}_{waste}}{T_C} - \frac{-\widetilde{Q}_{waste}}{T_H} \geq 0$$

です。

エネルギー流密度 \widetilde{E} に着目した経験則 $\nabla \widetilde{E} = 0$ は定常状態の熱力学第一法則ですが、エントロピー流密度 \widetilde{S} に着目した経験則 $\nabla \widetilde{S} \geq 0$ は定常状態の熱力学第二法則です。どちらの経験則も、その出現は熱力学の歴史的転換点でした。

クラウジウスは1854年論文で、新しい示量性状態量として、単位質量あたりのエントロピー S を認識した：

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \nabla \widetilde{S} = \sigma$$

左辺第一項はエントロピー密度 ρS の時間変化です。右辺の σ はエントロピー生成密度です。

この数式表現は示量性状態量と移動量と生成量との関係です。ある市の人口を ρS とし、この市の面積を単位面積とする。 $\partial(\rho S)/\partial t$ はこの市の人口の時間変化です。転出者数から転入者数を差し引いた正味の転出者数が $\nabla \widetilde{S}$ です。出生数から死亡数を差し引いた正味の出生数が σ です。転出届、転入届、出生届、死亡届を受理することで人口の増減を推定するのは戸籍住民課の仕事です。

左辺第二項 $\nabla \tilde{S}$ はエントロピー流密度 \tilde{S} の湧き出しです。定常状態 ($\partial(\rho S)/\partial t = 0$) では

$$\nabla \tilde{S} = \sigma$$

なので、エントロピー流増大則により、 $\sigma \geq 0$ です。クラウジウスの1854年論文では、定常非定常に関わらず

$$\sigma \geq 0$$

とし、これを**熱力学第二法則**と命名した。

熱力学第二法則 $\sigma \geq 0$ も基本的経験則の一つです。定常状態では $\partial(\rho S)/\partial t = 0$ なので、

$$\nabla \tilde{S} = \sigma \geq 0 \quad (1.7)$$

です。このように $\sigma \geq 0$ からエントロピー流増大則（あるいはクラウジウスの不等式）が導出できるので、クラウジウスの不等式（1850年）は熱力学第二法則の最初の定式化とされた。

熱力学の第一法則と第二法則とは、いずれも、生成密度に関わる経験則です。第一法則はエネルギー生成密度の値がゼロであることを主張し、第二法則はエントロピー生成密度の値が負にならないことを主張している。

孤立系では、その定義により、孤立系の表面を通して孤立系内部に出入りする質量流もエネルギー流もエントロピー流もゼロです。従って孤立系では、全質量と全エネルギーとは変化しないが、全エントロピーは減少することがない。つまり、孤立系の全エントロピーが増加する方向が時間の正方向です。この意味で、熱力学第二法則は時間の矢とも呼ばれている。力学的時間は反転可能ですが熱力学的時間は反転不可能です。

探偵小説は熱力学第二法則に着目した小説です。探偵小説では何かの事件が起きるとその原因を探そうとする複数の人が登場し、名探偵が原因を突き止める。事件は原因の結果であるとの共通認識があるのでしょうか。原因と結果には明確な時間的順序があるので、アリバイの真偽に列車などの時刻表が重要な役割を果たします。

新しい示量性状態量エントロピー S の出現により、熱力学で本質的な示量性状態量が出揃った。平衡状態の熱力学はギブズ（1839-1903年）により1870年代に完成され、後の物理化学の基礎となった。多くの熱力学の教科書はギブズの仕事の抜粋です。

エントロピー、エントロピー流密度、エントロピー生成密度などは新しい言葉です。熱力学第二法則の一步手前まで近づいたと言われているSadi カルノーの著書（1824年）ではエントロピー生成 σ を「無駄の発生」と呼びました。エネルギー変換の非対称性に着目したクラウジウス（1854年）はエントロピー生成密度 σ を「変換の当量」と呼んでいます。熱流密度と仕事流密度との相互変換に関わる量だからでしょう。

クラウジウスが示量性状態量としてのエントロピー S を認識したのは1854年ですが、示量性状態量としてのエントロピー S に「エントロピー」という呼称を使ったのは12年後の1865年のことです。「エントロピー」は変換を意味するギリシャ語トロペーに由来する造語です。この造語からもクラウジウスがエネルギー変換に強く拘ったことが判ります。

余談ですが、エントロピー流密度には記号 \tilde{S} を、エントロピー生成密度に記号 σ を、示量性状態量としてのエントロピーに記号 S を使うのは、すべて、Sadi カルノーへの敬意の表れです。1824年に出版されたカルノーの著書『火の動力』は、熱素保存則に基づく熱学が主流の時代に、熱力学第一法則をあたりまえのこととして使った先見性だけでなく、30年後にクラウジウスにより確立された熱力学第二法則の一步手前まで来ていたとして高く評価されている。

エントロピーを忌避する人は、1850年以前の状態に留まっていることになる。

1.4 定常状態の分類

熱機関は原動機とヒートポンプの総称です。原動機、ヒートポンプなどの言葉は、それぞれの機能を意味するだけでなく、それぞれの機能を目指して設計製作された装置の名前として使われることが多い。しかし、製作された装置が設計目標通りの機能を果たすとは限らない。ここでは、装置の名前ではなく、熱力学的機能を

意味する言葉として使う。装置の名前ではないので、局所的に果たしている熱力学的機能を意味する。

仕事流密度の湧き出し

$$W \equiv \nabla \tilde{I}$$

を仕事源と呼ぶ。仕事源を使うと、定常状態の熱力学第一法則(1.2)は

$$W + \tilde{S} \nabla T + T\sigma = 0 \quad (1.8)$$

です。

定常状態の熱力学第二法則(1.7)を考慮すると、原動機や仕事流の増幅器のように $W > 0$ では

$$0 < W \leq -\tilde{S} \nabla T$$

であり、ヒートポンプ $\tilde{S} \nabla T > 0$ では

$$0 < \tilde{S} \nabla T \leq -W$$

です。対流など熱機関以外では

$$W \leq 0 \wedge \tilde{S} \nabla T \leq 0$$

です。いずれも熱力学第二法則 $\sigma \geq 0$ を満足している。

このことを W と $\tilde{S} \nabla T$ の張る 2次元平面を使って図1.2に示した。平衡状態は原点です。熱力学第一法則(1.8)は σ が一定の直線で、直線 $\sigma = 0$ に平行です。直線 $\sigma = 0$ から原点を除くとカルノー機関です。単純熱伝導では $W = 0 \wedge \tilde{S} \nabla T < 0$ であり、一様温度での摩擦では $W < 0 \wedge \tilde{S} \nabla T = 0$ です。摩擦による発熱は $T\sigma$ です。

$\sigma < 0$ の領域は実験不可能なあの世です。この意味で直線

$$\sigma = 0$$

は三途の河です。時の流れは、この世では $\sigma > 0$ なので過去から未来へ向かいます。三途の河では時の流れは止まるのか？ あの世では時の流れは未来から過去へ向かうのか？ 実験不可能なあの世のことは自然科学の対象外です。

第4象限で $\sigma \geq 0$ の領域は原動機の領域です。熱音響現象では熱音響自励振動、スターリング原動機、仕事流の増幅器などが含まれる。

第2象限で $\sigma \geq 0$ の領域はヒートポンプの領域です。熱音響ヒートポンプの仲間にはスターリング冷凍機、GM冷凍機、パルス管冷凍機、共鳴管冷凍機などがある。

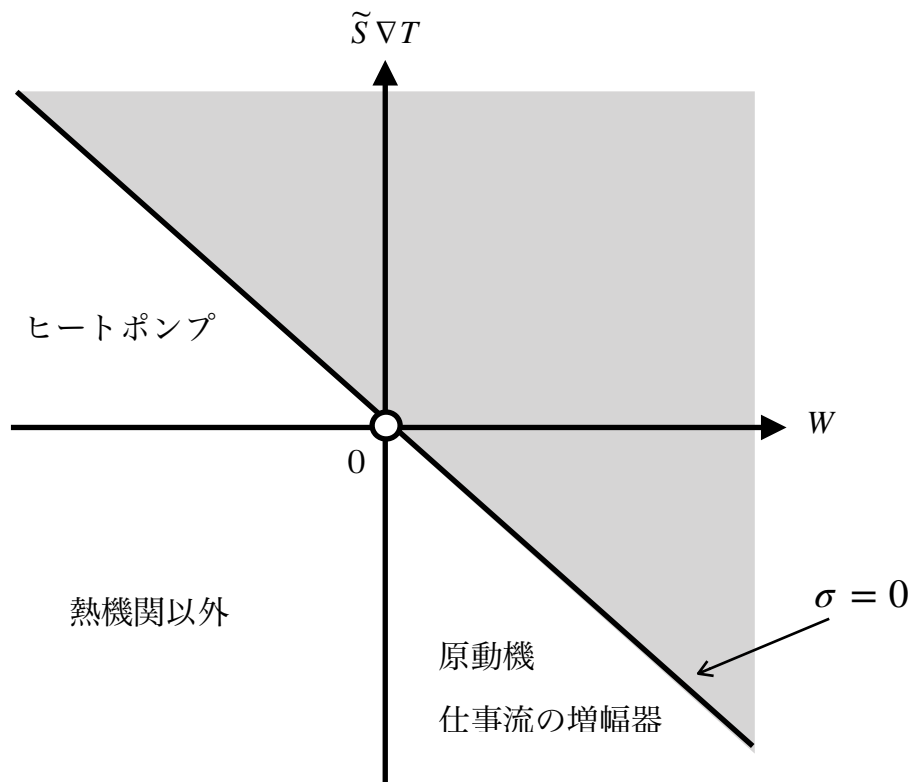


図1.2 定常状態の分類：灰色の領域は、エントロピー生成密度が負なので、熱力学第二法則に抵触する。原点は平衡状態。原点を通る対角線上ではエントロピー生成密度がゼロなのでカルノー機関に対応する。

第3象限は対流など熱機関以外の領域であり熱音響現象ではドリームパイプがある。

最後に、単位長さの逆数の次元をもつ

$$\zeta \equiv -\frac{W}{\bar{Q}}$$

に着目する。原動機 ($W > 0$) では

$$\zeta = \frac{W}{-\bar{Q}} > 0$$

は局所的効率を意味するが、ヒートポンプ ($\bar{Q} > 0$) では

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{\bar{Q}}{-W} > 0$$

は局所的COPを意味する。

ζ の符号は熱機関と熱機関以外とを区別する指標として使うことが出来る：熱機関では $\zeta > 0$ だが、熱機関以外では $\zeta \leq 0$ です。このことを示しましょう。温度勾配が正 ($\nabla T > 0$) になるように、座標軸の正方向を選んだので、ヒートポンプでは $\widetilde{Q} \geq 0$ ですが、ヒートポンプ以外では $\widetilde{Q} < 0$ です。原動機では $W > 0$ ですが、原動機以外では $W \leq 0$ です。従って、 W と \widetilde{Q} とは、熱機関では異符号ですが、熱機関以外では同符号です。特に単純熱伝導では $W = 0$ です。

ζ と $\nabla T/T$ との関係は

$$\zeta - \frac{\nabla T}{T} = \frac{\sigma}{\widetilde{S}}$$

です、この関係を得るには、熱力学第一法則 $W + \nabla \widetilde{Q} = 0$ を使って、

$$\zeta = \frac{\nabla \widetilde{Q}}{\widetilde{Q}}$$

とし、さらに、熱流密度 \widetilde{Q} とエントロピー流密度 \widetilde{S} との関係 $\widetilde{Q} = T\widetilde{S}$ を使えばよい。

ζ と $\nabla T/T$ との大小関係は、ヒートポンプでは

$$\zeta \geq \frac{\nabla T}{T}$$

だが、ヒートポンプ以外では

$$\zeta \leq \frac{\nabla T}{T}$$

です。熱力学第二法則 $\sigma \geq 0$ により、 σ/\widetilde{S} の符号は \widetilde{S} の符号と同じです。ヒートポンプ ($\widetilde{S} > 0$) では $\sigma/\widetilde{S} \geq 0$ だが、ヒートポンプ以外 ($\widetilde{S} < 0$) では $\sigma/\widetilde{S} \leq 0$ です。このことから ζ と $\nabla T/T$ との大小関係が明かです。

このように、原動機の効率やヒートポンプのCOPを議論するためにもエントロピー生成密度 σ を理解することが大切です。

<第1章の参考書>

富永 昭 『誕生と変遷に学ぶ熱力学』 (2003年 内田老鶴圃)

第2章 周期的定常状態の輸送現象

熱音響現象の理解は微視的階層と粗視的階層の二つの階層から成る。微視的階層は流体物理学的理解であり、流体の振動運動を議論する。粗視的階層は熱力学的理解であり、第1章定常状態の輸送現象が基本となる。

二つの階層を繋ぐには、流体の振動運動に伴う輸送現象は、角周波数、振幅、位相差などが定常なら、周期的定常状態であることを使う。周期的定常状態は充分長周期にわたり時間平均することで定常状態とみなすことができる。

この階層構造は物性物理学の階層構造と似ている。物性物理学では観測される物理量は全て巨視的。観測された巨視的物理量を量子統計力学という微視的理論で理解しようとするのが物性理論です。構成粒子の平均自由行程は巨視的物理量の空間分解能です。巨視的物理量のサイズが平均自由行程より小さいと、巨視的物理量の意味が不明瞭になる。

統計力学の平均自由行程に対応するのが振動運動する流体の変位振幅なら、輸送現象の熱力学的理解の空間分解能は変位振幅程度です。

熱音響現象をきちんと理解し記述することを目指した熱音響理論も微視的階層と粗視的階層の二つの階層から成る。二つの階層をつなぐために、粗視的階層の概念である仕事流密度、エントロピー流密度、熱から仕事へのエネルギー変換密度などを微視的階層の概念である流体の振動運動と結びつける。なお、伝統的音響学では流体の振動運動による仕事流密度だけを議論しエントロピー流密度、熱から仕事へのエネルギー変換密度などは議論しなかった。

熱音響現象では作業流体が振動運動している。振動運動の角周波数を ω とすると、振動の周期は $2\pi/\omega$ です。

振動運動している流体の単位質量あたりの状態量の記号を次のように約束する。時間平均には添え字 m をつける。密度の時間平均は ρ_m 、温度の時間平均は T_m 、圧力の時間平均は p_m 、エントロピーの時間平均は S_m とする。添え字 m の付いていない状態量は時間平均からのずれであり、角周波数 ω で振動している。

流体要素毎の振動中心からの変位 ξ の時間平均は0です。流速 $u \equiv du/dt$ の時間平均も0です。

2.1 仕事流と仕事流密度

単位質量の流体が流速 u で運動すると、単位時間あたり

$$\frac{p_m + p}{\rho_m} \simeq \frac{p_m}{\rho_m} + \frac{p}{\rho_m}$$

だけの力学的エネルギーが速度 u で移動する。つまり、単位質量の流体の運動による力学的エネルギーの移動速度は

$$\left(\frac{p_m}{\rho_m} + \frac{p}{\rho_m} \right) u$$

です。 p は時間平均圧力 p_m からのずれです。

定常的振動流に伴う仕事流は単位質量の流体による単位時間あたりの力学的エネルギーの移動

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(\frac{p_m}{\rho_m} + \frac{p}{\rho_m} \right) u dt = \frac{1}{\rho_m} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p u dt = \frac{1}{\rho_m} \frac{\omega}{2\pi} \oint p d\xi \quad (2.1)$$

です。角周波数 ω の振動の周期は $2\pi/\omega$ であり、振動流速 u の周回積分は零だからです。 ξ は振動中心からの変位です。

この仕事流に流体の密度 ρ_m を乗じると、単位面積を通過する仕事流すなわち仕事流密度

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p u dt = \frac{\omega}{2\pi} \oint p d\xi$$

が得られる。これは、積 $p \cdot u$ の時間平均

$$\tilde{I} \equiv \langle p \cdot u \rangle_t$$

に等しい。時間平均 $\langle p \cdot u \rangle_t$ の詳細については第4章で述べる。

なお、ワット（1736-1819年）の図示仕事や音響学の音の強度（intensity）は、仕事流密度に対応する。

2.2 エントロピー流とエントロピー流密度

単位質量の流体が速度 u で運動する際のエントロピー移動は単位時間あたり $(S_m + S)u$ です。 S は時間平均エントロピー S_m からのずれです。

定常的振動流に伴うエントロピー流は単位質量の流体によるエントロピー移動

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (S_m + S) u dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} S u dt = \frac{\omega}{2\pi} \oint S d\xi \quad (2.2)$$

です。この最後の周回積分によれば、エントロピー流は変位振幅の2倍程度の間隔でのエントロピーのバケツリレーです。

同じことだが、熱容量の大きい蓄熱器の壁は、エントロピーの一時預かり所であり、蓄熱器は吸放熱器が連続的に分布しているものと見做すことができる。

このエントロピー流に流体の密度 ρ_m を乗じると、単位面積を通過するエントロピー流すなわちエントロピー流密度

$$\rho_m \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} S u dt = \rho_m \frac{\omega}{2\pi} \oint S d\xi$$

が得られる。時間積分の積分時間は一周期 $2\pi/\omega$ に等しいので、流体の振動運動に伴うエントロピー流密度は積 $S \cdot u$ の時間平均 $\langle S \cdot u \rangle_t$ に ρ_m を乗じたもの

$$\rho_m \langle S \cdot u \rangle_t$$

です。これは対流による熱流密度に対応する。時間平均 $\langle S \cdot u \rangle_t$ の詳細については第3章で述べる。

エントロピー流密度には、振動運動とは関わりのない熱伝導によるエントロピー流密度

$$\tilde{S}_\kappa = \kappa \frac{\nabla T_m}{T_m}$$

もあるので、エントロピー流密度は、

$$\tilde{S} \equiv \rho_m \langle S \cdot u \rangle_t + \tilde{S}_\kappa$$

です。

2.3 エネルギー流密度

仕事流密度 $\tilde{I} \equiv \langle p \cdot u \rangle_t$ と熱流密度

$$T_m \tilde{S} = T_m \left[\rho_m \langle S \cdot u \rangle_t + \tilde{S}_\kappa \right]$$

との和として導入されたエネルギー流密度

$$\tilde{E} \equiv \tilde{I} + T_m \tilde{S} = \langle p \cdot u \rangle_t + T_m \left[\rho_m \langle S \cdot u \rangle_t + \tilde{S}_\kappa \right]$$

は定常的振動流によるエンタルピー流密度

$$\rho_m \langle H \cdot u \rangle_t \simeq \langle p \cdot u \rangle_t + T_m \rho_m \langle S \cdot u \rangle_t$$

と熱伝導による熱流密度 $T_m \tilde{S}_\kappa$ との和

$$\tilde{E} = \rho_m \langle H \cdot u \rangle_t + T_m \tilde{S}_\kappa$$

に等しい。つまり、エネルギー流密度のうちで振動運動に伴う部分はエンタルピー流密度です。

流体の振動運動に伴うエンタルピー流密度は

$$\rho_m \langle H \cdot u \rangle_t \simeq \langle p \cdot u \rangle_t + T_m \rho_m \langle S \cdot u \rangle_t$$

です。なぜなら、単位質量あたりのエンタルピー（熱関数とも呼ばれる）の時間平均からのずれ H は、 S と p について最も粗い近似で

$$H \simeq T_m S + \frac{P}{\rho_m}$$

だからです。

エンタルピーは物理化学、伝熱工学、熱流体工学などで馴染みだが、エンタルピーもエンタルピー流密度も流体力学の教科書にはあまり見当たらない。

例外はランダウ・リフシッツ共著竹内均訳『流体力学1』（東京出版、1970）¹です。この第一章に時間平均していないエネルギー流密度とともに出現する。このエネルギー流密度を時間平均すると、上記エンタルピー流密度と運動エネルギー流密度 $\rho_m \langle (1/2)u^2 \cdot u \rangle_t$ との和に等しい。運動エネルギー流密度は u について3次の量なので、小振幅では、上記エンタルピー流密度に対して無視して良いだろう。

2.4 熱から仕事へのエネルギー変換

周期性に着目する。単位質量の流体の状態量は一周期後に完全に元に戻る。示強性状態量も示量性状態量も一周期後に完全に元に戻る。

周期性に着目すると、単位質量の流体による振動の一周期にわたる周回積分

$$\oint T ds$$

が意味を持つ。この周回積分は平衡状態の熱力学を使って熱機関を議論する際に使われる $T-S$ 線図の囲む面積に対応する。単位質量の流体はこの周回積分だけのエネ

¹ 原著はランダウ・リフシッツ共著『連続体の物理学』（第2版、1954）は流体物理学と弾性論とからなる。あまりに大部なので後に2巻に分けた。邦訳では流体物理学の部分を更に2巻に分けた。音波、衝撃波、超流動流体の二流体モデルは『流体力学2』（東京出版、1971）で扱っている。流体力学の類書の中ではかなり独創的な名著です。訳者あとがきによれば、地球物理学者として地球振動や地球磁場を研究しただけでなく、自ら創刊した科学雑誌『NEWTON』では地球物理学とプレートテクトニクスの普及に努めた訳者竹内均にとって、原著は愛読書だった。

ルギーを熱として吸収し、同じ量のエネルギーを仕事として放出する。このことは単位質量の流体の振動運動にともなう一周期あたりの熱から仕事へのエネルギー変換を意味する。

周期性に着目したこのような議論は、熱音響理論だけでなく、外燃機関（external combustion engine）のサイクル議論でも見かける。

外燃機関のサイクル議論では、往復運動する流体の移動距離は高温端と低温端に設置された吸放熱器間の距離よりも大きいことが必要です。このために変位振幅が吸放熱器間の距離よりも小さい場合はサイクル議論の対象外です。また、このような大振幅では流体の運動を線型近似で議論することは良い近似ではないでしょう。

熱音響現象では、外燃機関のサイクル議論とは異なり、変位振幅が蓄熱器（regenerator）の長さに比べて小さくても差し支えない。蓄熱器は吸放熱器が連続的に分布しているものと見做すことが出来る（2.2 エントロピー流とエントロピー流密度）からです。また、流体の振動運動を線型近似で議論する熱音響理論では、変位振幅が小さいことが必要です。

蓄熱器に着目する熱音響理論と蓄熱器を無視するサイクル議論とで、現象を理解し記述するための粗いイメージが異なる。蓄熱器を無視するサイクル議論では非線形性が強いので流体の運動を議論することは困難ですが、蓄熱器を吸放熱器が連続的に分布しているものと見做す熱音響理論では流体の運動を線型近似で議論するのは当然です。

単位質量の流体の振動運動にともなう熱から仕事へのエネルギー変換の時間平均は

$$\frac{\omega}{2\pi} \oint T dS = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} T \frac{dS}{dt} dt$$

です。

これに時間平均密度 ρ_m を乗じると熱から仕事へのエネルギー変換密度

$$\rho_m \frac{\omega}{2\pi} \oint T dS = \rho_m \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} T \frac{dS}{dt} dt$$

が得られる。

この右辺は振動運動する流体が単位時間に行う熱から仕事へのエネルギー変換密度が

$$\rho_m \left\langle T \cdot \frac{dS}{dt} \right\rangle_t$$

であることを意味する。なお、自由空間中の音波のように流体の振動運動が断熱的 ($dS/dt = 0$) の場合には熱から仕事へのエネルギー変換が生じない。

19世紀末に発達した平衡状態の熱力学は流体物理学にも寄与した。流体力学が流体物理学に進化するには局所平衡の仮定が必要だった。運動している流体は全体としては非平衡状態ですが、「運動している流体要素自身は平衡状態にある」と仮定する。これが局所平衡の仮定です。同じことですが局所平衡の仮定は「運動している流体要素の熱力学的状態量は平衡曲面上にある」との仮定です。

局所平衡の仮定により、振動温度 T は振動圧力 p と振動エントロピー S とで展開できる。最も粗い近似で

$$T \simeq \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S p + \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_p S$$

です。

これを使うと、単位質量の流体の振動運動による一周期 $2\pi/\omega$ あたりの熱から仕事へのエネルギー変換は

$$\oint T dS \simeq \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \oint p dS \quad (2.3)$$

です。なぜなら

$$\oint T dS \simeq \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \oint p dS + \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_p \oint S dS$$

の右辺第2項の周回積分はゼロだからです。

こういうわけで、単位質量の流体が振動運動により一周期 $2\pi/\omega$ に行う熱から仕事へのエネルギー変換は

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \oint p dS \simeq \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \left\langle p \cdot \frac{dS}{dt} \right\rangle_t \quad (2.4)$$

です。

熱から仕事へのエネルギー変換には熱膨張が本質的に重要です。マクスウェルの関係式と平衡状態の熱力学の恒等式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \frac{\beta T_m}{\rho_m C_p} = \frac{(\gamma - 1)K_S}{\beta} \quad (2.5)$$

を使うとエネルギー変換(2.4)は熱膨張率 β に比例するからです。 β の値がゼロの流体では熱から仕事へのエネルギー変換は生じない。

(2.4)の積分計算の詳細については第3章で述べる。

2.5 仕事流、エントロピー流、エネルギー変換の幾何学的関係

単位質量の流体の振動運動に伴う仕事流(2.1)、エントロピー流(2.2)、熱から仕事へのエネルギー変換(2.3)は、いずれも、周回積分に比例している。このことに幾何学的イメージを与えるために、 $\xi - p - S$ 空間の張る3次元空間内の楕円軌道で流体の振動運動を表す(図2.1参照)。

単位質量の流体の振動運動を表す楕円軌道を、 $\xi - p$ 平面、 $\xi - S$ 平面、 $S - p$ 平面に射影したのも一般的には楕円である。仕事流、エントロピー流、熱から仕事へのエネルギー変換は、それぞれの楕円の面積に比例している。

仕事流(2.1)は単位質量の流体の振動運動の軌道を $\xi - p$ 平面に射影した楕円の面積

$$\oint p d\xi$$

に比例する。

エントロピー流(2.2)は単位質量の流体の振動運動の軌道を $\xi - S$ 平面に射影した楕円の面積

$$\oint S d\xi$$

に比例する。

熱から仕事へのエネルギー変換(2.4)は単位質量の流体の振動運動の軌道を $S - p$ 平面に射影した楕円の面積

$$\oint p dS$$

に比例する。

このような幾何学的イメージは数式表現よりも直感的理解に役立つことがある。進行波は波として進むだけでなく、その仕事流の値も有限です。 $\xi - S$ 平面への射影

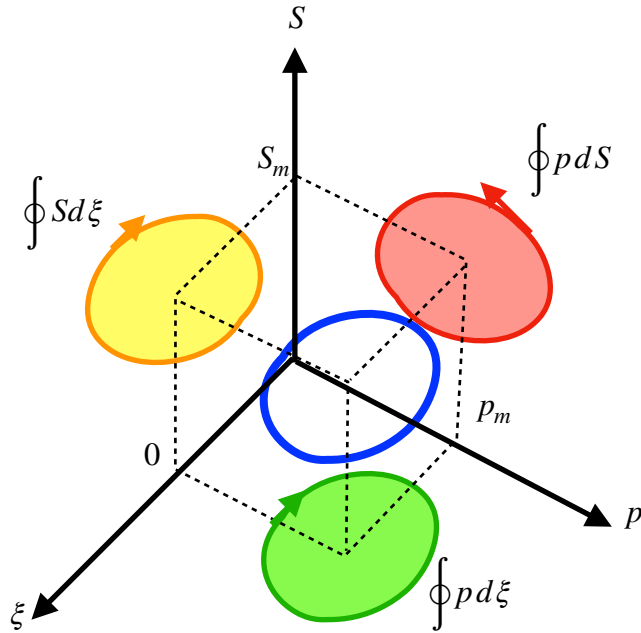


図2.1 $\xi-p-S$ 空間の張る3次元空間：単位質量の流体の振動運動の軌道は中央の楕円。仕事流は $\xi-p$ 平面に射影した楕円の面積に比例し、エントロピー流は $\xi-S$ 平面に射影した楕円の面積に比例する。熱から仕事へのエネルギー変換は $S-p$ 平面に射影した楕円の面積に比例する。矢印の向きは原動機の場合。ヒートポンプでは逆向き。

と $S-p$ 平面への射影も有限なので、エントロピー流とエネルギー変換が有限です。流体の振動運動の軌道の傾きによっては射影が線分になることがある。流体の振動運動で S が不変なら、 $\xi-S$ 平面への射影と $S-p$ 平面への射影が線分になり、仕事流の値だけが有限です。これに対応するのは自由空間中の断熱音波です。定在波では、 $\xi-p$ 平面への射影が線分になるので仕事流の値がゼロですが、進行波と同様にエントロピー流と熱から仕事へのエネルギー変換とが有限です。流体の振動運動で p が不変なら、 $\xi-p$ 平面への射影と $S-p$ 平面への射影が線分になり、エントロピー流の値だけが有限です。これに対応するのは液体を作動流体とするドリームパイプです。

第2章では流体の振動運動による仕事流密度、エントロピー流密度、熱から仕事へのエネルギー変換を議論した。熱から仕事へのエネルギー変換で使ったサイクル

議論は、熱音響理論と伝統的な外燃機関の議論とで同じだが、温度振幅が異なる。このことが熱音響理論と伝統的な外燃機関の議論との基本的な相違です。

蓄熱器に着目しない伝統的議論では、エネルギー変換に寄与する流体要素は高温部と低温部との間を往復運動する必要があるので、流体の変位振幅は蓄熱器の長さ比べて大きい。熱音響理論では、蓄熱器を吸放熱器の連続的分布と見做すので、エネルギー変換に寄与する流体要素の温度振幅が小さく、変位振幅は蓄熱器の長さ比べて小さい。

蓄熱器を議論する熱音響理論では流体の運動を議論する際に線型近似を使うことが許される。小振幅では流体の運動を議論する際に線型近似が意味を持つからです。しかし、伝統的議論では、流体の運動を議論することが難しい。大振幅のために、線型近似が無意味になる虞があるからです。

熱伝導度や粘性係数は輸送係数の仲間で、非平衡状態で重要な役割を果たす。流体の振動運動によるエントロピー流密度とは別に熱伝導によるエントロピー流密度も存在する。

また、熱から仕事へのエネルギー変換密度とは別に仕事の散逸がある。仕事の散逸には粘性による運動エネルギー密度の散逸も含まれる。熱伝導によるエントロピー流密度や粘性による運動エネルギー密度の散逸も含めた議論は次の第3章で行う。

<第2章の参考書>

富永 昭 『熱音響工学の基礎』（1998年 内田老鶴圃）

琵琶哲志 『熱音響デバイス』（2018年 コロナ社）

第3章 熱音響理論：微視的階層

熱音響機器の核心的部品は蓄熱器 (regenerator) と呼ばれる軸方向温度勾配が有限の部品です。蓄熱器はただの円筒管の場合もあるし、ピストンシリンダーとピストンとの隙間 (gap regenerator と呼ばれる) の場合もある。円筒管や gap regenerator では、流体物理学的議論が可能で、太い管に、ステンレスたわしを詰めたり、円盤状金網を多数積層した蓄熱器では、流路形状が複雑で流体物理学的議論が困難です。後者の場合には、細い円筒管を束ねた蓮根模型に置き換えることで、円筒管模型が生きてくる。

この章では円筒管内の流体の振動運動を議論する。

3.1 微視的階層と粗視的階層

科学は積み重ねの学問です。科学は一步一步着実に歩んできた先人達の仕事が後世に受け継がれることで発展してきた。粗視的階層での議論に使う熱力学は19世紀のS.カルノー、ケルヴィン、トムソン、クラウジウスがその基礎を築いた。微視的階層の議論に使う流体物理学は、20世紀の拡張キルヒホッフ理論 (1949年) です。拡張キルヒホッフ理論は19世紀のキルヒホッフ理論 (1868年) をクラマース (1894-1952年) が拡張したものです。

流体力学の創始者は18世紀のD.ベルヌーイ (1700-82年) やオイラー (1707-83年) とされる。17世紀のニュートン力学を数学的に整理したラグランジュ (1736-1813年) は著書『解析力学』 (1788年) で、質点系の力学を連続体の力学へ拡張した。1788年はフランス革命の前年です。

18世紀の流体力学はその対象を理想流体に制限したので、現実の流体を扱うのは無理だった。

19世紀に、粘性流体を対象とするだけでなく、局所平衡も仮定することで現実の流体を対象とする流体物理学に変容した。円筒管内の流体の振動運動を議論する際に、初めて粘性を考慮したのは19世紀のヘルムホルツ (1821-94年) です。クントの実験に名を残したクント (1839-94年) の指摘に答えて、初めて熱エネルギーを含めたエネルギー保存則を考慮したのは同じ19世紀のキルヒホッフ (1828-87年) です。このキルヒホッフ理論 (1868年) は大成功を取めた。19世紀の流体物理学に

基づいた音響学の成果はレイリー卿（1842-1919年）の名著”The Theory of Sound”（1877-78年）にまとめられ、その後の音響学の基礎となった。

キルヒホッフ理論（1868年）には適用条件がある。まず、振動圧力 p が流路断面内で一様となるように、円筒管の内径に比べて波長が充分長い場合に限定する。次に、時間平均密度 ρ_m が一様となるように、時間平均圧力 p_m と時間平均温度 T_m とは一様と仮定する。

拡張キルヒホッフ理論（1949年）では、時間平均温度 T_m の一様性を流路断面内に限定し、軸方向の温度勾配 ∇T_m を認めた。時間平均圧力 p_m は一様のままなので、軸方向の密度勾配 $\nabla \rho_m$ も認めたことになる。

キルヒホッフ理論も拡張キルヒホッフ理論も、流体物理学的議論は線形近似です。線形近似については後に述べる。

時間平均温度 T_m が流路断面内で一様との仮定の妥当性と非線形性については第6章非線形性と吸放熱器で議論する。

3.1.1 線形近似：オイラーの視点とラグランジュの視点

流体力学的議論や流体物理学的議論には、18世紀以来、二つの視点がある。オイラーの視点とラグランジュの視点です。ラグランジュの視点では、流体要素に着目し、流体要素とともに観測点が移動する。流体要素の変位、対流、流体要素の軌道などの概念はラグランジュの視点です。電磁気学でも荷電粒子の軌道はラグランジュの視点で記述される。オイラーの視点は同時多点観測に対応し、電磁気学では電磁場の理論で使われている。速度場や音場という概念はオイラーの視点です。

キルヒホッフ理論でも拡張キルヒホッフ理論でも、定常流が無い場合には、変位 ξ や流速 u の全微分は

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \nabla \xi\end{aligned}$$

です。全微分はラグランジュ微分とも呼ばれる。

線形近似では振動量の2次の量である $u \nabla u$ と $u \nabla \xi$ を、それぞれ、振動量の1次の量である $\partial u / \partial t$ と $\partial \xi / \partial t$ に比べて充分小さいと仮定して無視する：

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$u\nabla u$ が $\partial u/\partial t$ に比べて充分小さいことは、物理的には、流速 u の大きさが音速に比べて充分小さいことを意味する。この意味で線形近似が成り立つのは u の大きさが音速に比べて充分小さい場合に制限される。このために、マッハ数が大きい場合には線形近似は悪い近似です。因みに熱音響現象のマッハ数は通常は0.1以下です。

時間平均圧力 p_m は一様 ($\nabla p_m = 0$) とする。このために

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u\nabla(p_m + p)$$

は振動量の2次の量 $u\nabla p$ を $\partial p/\partial t$ に比べて充分小さいとする線形近似では

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

です。この仮定も u の大きさが音速に比べて充分小さいことを意味する。

線形理論はオイラーの視点なのかラグランジュの視点なのか視点が定まらないように見えることがある。線形近似では、振動圧力 p 、振動流速 u 、(振動)変位 ξ については全微分(ラグランジュ微分)と偏微分(オイラー微分とも呼ばれる)とが等しいからです。

キルヒホッフ理論や通常の音響学では一様温度 ($\nabla T_m = 0$) の場合を議論するので、線形近似ではオイラーの視点とラグランジュの視点との区別が無くなり、速度場や音場などの概念が役立つ。

非一様温度 ($\nabla T_m \neq 0$) の場合も議論する拡張キルヒホッフ理論では、オイラーの視点ではなくて、ラグランジュの視点です。流体の振動運動を記述する変数は振動圧力 p と振動流速 u あるいは(振動)変位 ξ だけではない。温度 T については、線形近似でも

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\nabla T_m$$

なので、全微分(ラグランジュ微分)と偏微分(オイラー微分)とは異なる。

$\nabla T_m \neq 0$ では $\nabla \rho_m \neq 0$ なので、密度 ρ についても、線形近似では、

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\nabla \rho_m$$

です。 $\nabla T_m \neq 0$ では $\nabla S_m \neq 0$ なので、エントロピー S についても、線形近似では、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u \nabla S_m$$

です。しかも、 ∇T_m に比例する

$$\nabla \rho_m = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \nabla T_m = -\rho_m \beta \nabla T_m$$

と

$$\nabla S_m = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \nabla T_m = \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m$$

は、後にのべるように、熱音響現象にとって重要です。

3.1.2 線形近似：時刻依存性の複素表示

線型近似には様々な利点がある。

まず、角周波数 ω で振動運動している量の時刻依存性に複素表示を使うことが出来る。流体要素の振動中心からの変位 ξ の流路断面平均 $\langle \xi \rangle_r$ の時刻依存性を

$$\langle \xi \rangle_r = \langle \hat{\xi} \rangle_r \exp i \omega t$$

とする。 $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ は $\langle \xi \rangle_r$ の振幅です。振動流速 $u \equiv d\xi/dt$ の流路断面平均 $\langle u \rangle_r$ の時刻依存性は

$$\langle u \rangle_r = \frac{\partial}{\partial t} \langle \xi \rangle_r = i \omega \langle \xi \rangle_r = \langle \hat{u} \rangle_r \exp i \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

です。ここで $\langle u \rangle_r$ の振幅は

$$\langle \hat{u} \rangle_r = \omega \langle \hat{\xi} \rangle_r$$

です。 $\langle u \rangle_r$ の位相は $\langle \xi \rangle_r$ の位相より $\pi/2$ だけ進んでいる。振動圧力 p の時刻依存性は

$$p = \hat{p} \exp i (\omega t + \theta)$$

です。ここで p の振幅は \hat{p} です。 p の位相は変位 $\langle \xi \rangle_r$ の位相より θ だけ進んでいると約束する。

振動運動の様子をこのように簡単に表現できることは線型近似の利点の一つです。偏微分 $\partial/\partial t$ を演算子と見做して、 $i\omega t$ に置き換えることが出来るのも線型近似の利点です。

このような線形数学の利点はヘヴィサイド (1850-1925年) の功績が大きい。ヘヴィサイドは、マクスウェルの電磁気学を数学的に整理したり、電気工学にイン

ピーダンス概念を導入しただけでなく、「ヘヴィサイドの演算子法」に名を残した。

重ね合わせの原理がつかえることも線型近似の利点です。非線形性が顕著な場合には、振動の周波数成分という概念が危うくなります。周波数成分とは振動が様々な周波数の振動の重ね合わせで表現出来る場合に意味がある言葉です。非線形性が顕著な場合には重ね合わせが無意味になるからです。

非線形性が顕著となる場所を特異点と呼ぶことにする。線形近似が適用できるのは、振動中心の位置が特異点から変位振幅 $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ 以上離れている場合に制限される。振動領域に特異点を含むと非線形性のために線型近似が悪い近似になる虞がある。

3.2 管内流体の振動運動：拡張キルヒホッフ理論

流体物理学の基本法則は質量保存則と運動量保存則とエネルギー保存則の3法則です。三つの基本法則に対応して、独立変数の数は振動変位 ξ あるいは振動流速 $u = d\xi/dt$ 、振動圧力 p 、振動エントロピー S の三つです。伝統的音響学では断熱音波($S=0$)のみ扱うので、 p と ξ あるいは $u \equiv d\xi/dt$ の議論で終了です。熱力学的議論も行う熱音響理論で使う流体物理学的議論では、振動エントロピー S も議論する。

3.2.1 運動量保存則

力学では運動量保存則の数式表現を運動方程式と呼ぶ。18世紀の流体力学は粘性流体を扱うことが出来なかった。1822年に粘性流体の運動方程式を論じたナヴィエ(1785-1836年)と1845年にその一般式を導き出したストークス(1819-1903年)に因み、粘性流体の運動方程式は、ナヴィエ・ストークスの方程式と呼ばれている。

運動量保存則(すなわち運動方程式あるいはナヴィエ・ストークスの方程式)の線形近似は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-\nabla p}{\rho_m} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

です。ここで、 ν は動粘性係数です。流速 u に関わる項を右辺に集めると

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{-\nabla p}{\rho_m}$$

です。どちらも、時間 t と軸方向の座標 z については1階ですが、径方向 r について2階の偏微分方程式です。

2階の偏微分方程式に対応して、境界条件も二つある。一つは管壁に接している ($r = r_0$) 流体は粘性のために動けないこと $u(r_0) = 0$ です。二つ目は、流速 u の軸対称性と軸が流速 u の特異点でないことを表す軸上 ($r = 0$) では $\partial u / \partial r |_{r=0} = 0$ です。

この微分方程式の解 $u(r)$ を求める。

まず、解 $u(r)$ を

$$u(r) = \frac{1 - f_\nu(r)}{1 - \chi_\nu} \langle u \rangle_r \quad (3.1)$$

とする。ここで $\langle \dots \rangle_r$ は流路断面内平均を意味する。

$$\chi_\nu \equiv \langle f_\nu(r) \rangle_r$$

と $\langle u \rangle_r$ とは、それぞれ、 $f_\nu(r)$ と $u(r)$ の流路断面内平均です。

運動方程式の線形近似は、(3.1)を使うと、

$$\left[1 - f_\nu(r) - \frac{\nu}{i\omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_\nu(r)}{\partial r} \right) \right] \langle u \rangle_r = - \frac{1 - \chi_\nu}{i\omega} \frac{\nabla p}{\rho_m}$$

です。この右辺は r に依存しないので、左辺も r に依存しない。左辺が r に依存しないためには

$$-\frac{\nu}{i\omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_\nu(r)}{\partial r} \right) = f_\nu(r) \quad (3.2)$$

が必要です。(3.2)の場合には

$$\langle u \rangle_r = - \frac{1 - \chi_\nu}{i\omega} \frac{\nabla p}{\rho_m}$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u \rangle_r = - (1 - \chi_\nu) \frac{\nabla p}{\rho_m} \quad (3.3)$$

です。

必要条件(3.2)は

$$\frac{r_0^2}{\lambda_\nu^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_\nu(r)}{\partial r} \right) = f_\nu(r) \quad (3.4)$$

と同じです。ここで導入した

$$\lambda_\nu \equiv \frac{1 - i}{\sqrt{2}} r_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

を使うと

$$\lambda_\nu^2 = -i \frac{\omega}{\nu} r_0^2$$

だからです。

外力により振動運動させられている管内流体は、外力が消失すると粘性のために徐々に運動エネルギーが散逸して静止する。この散逸速度を特徴づける緩和時間は流体の動粘性係数 ν と流路半径 r_0 とから作られる粘性緩和時間

$$\tau_\nu \equiv \frac{r_0^2}{2\nu}$$

です。

これを使うと

$$\lambda_\nu = (1 - i)\sqrt{\omega\tau_\nu}$$

です。 $\omega\tau_\nu$ は粘性緩和時間 τ_ν で無次元化した角周波数です。

必要条件(3.4)は関数 $f_\nu(r)$ が第一種ベッセル関数

$$J_n\left(\lambda_\nu \frac{r}{r_0}\right)$$

に比例することを示している。第一種ベッセル関数については付録：第一種ベッセル関数 J_n とその管内音波への応用を参照して欲しい。

比例係数は最初の境界条件 $u(r_0) = 0$ により決まる。境界条件 $u(r_0) = 0$ は、(3.1)により、 $f_\nu(r_0) = 1$ なので

$$f_\nu(r) = \frac{J_n(\lambda_\nu \frac{r}{r_0})}{J_n(\lambda_\nu)}$$

です。

二つ目の境界条件 $\partial u / \partial r |_{r=0} = 0$ のためには $n = 0$ が必要です。第一種ベッセル関数の性質

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$J_0(0) = 1$$

$$n \neq 0 \text{ の場合には } J_n(0) = 0$$

と微分公式

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

を使うと

$$\left. \frac{dJ_0(x)}{dx} \right|_0 = -J_1(0) = 0$$

だからです。

従って

$$f_\nu(r) = \frac{J_0(\lambda_\nu \frac{r}{r_0})}{J_0(\lambda_\nu)}$$

です。これで $f_\nu(r)$ が決まった。

最後に

$$\chi_\nu \equiv \langle f_\nu(r) \rangle_r = \frac{2}{\lambda_\nu} \frac{J_1(\lambda_\nu)}{J_0(\lambda_\nu)} \quad (3.5)$$

です。

$$\langle f_\nu(r) \rangle_r = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} f_\nu(r) 2\pi r dr = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} f_\nu(r) r dr = \frac{2}{J_0(\lambda_\nu)} \int_0^1 J_0(\lambda_\nu t) t dt$$

に、ベッセル関数の定積分公式

$$\lambda \int_0^1 x^n J_{n-1}(\lambda x) dx = J_n(\lambda)$$

の $n = 1$ の場合を使えば良い。

以下では

$$f_\nu(r) \equiv \frac{J_0(\lambda_\nu \frac{r}{r_0})}{J_0(\lambda_\nu)}$$

を f_ν と略記する。

流速 u の流路断面内分布は

$$u = \frac{1 - f_\nu}{1 - \chi_\nu} \langle u \rangle_r$$

但し

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u \rangle_r = - (1 - \chi_\nu) \frac{\nabla P}{\rho_m} \quad (3.3)$$

です。また

$$\chi_\nu \equiv \langle f_\nu \rangle_r = \frac{2}{\lambda_\nu} \frac{J_1(\lambda_\nu)}{J_0(\lambda_\nu)} \quad (3.5)$$

です。粘性流体の運動量保存則の線型近似を流路断面内で平均したものが(3.3)です。

流速 u の振幅は複素数 $(1 - f_\nu)/(1 - \chi_\nu)$ に比例する。 $(1 - f_\nu)/(1 - \chi_\nu)$ は r/r_0 に依存する。この絶対値は流速 $u(r)$ の大きさに対応し、位相部分は流路断面内での位相差に対応する。

振動流速 $u(r)$ はレーザードップラー流速計で測定可能です。流路断面内平均 $\langle u \rangle_r$ が時刻に依存するので、圧力 p の信号などと同期した測定が必要です。この流速計が使用可能なら、実際に測定して、

$$u = \frac{1 - f_\nu}{1 - \chi_\nu} \langle u \rangle_r$$

と比べると、この流速計の凄さが実感できる。

非粘性流体 ($\nu = 0$) では、 $\tau_\nu = \infty$ なので、 $\omega \tau_\nu = \infty$ すなわち $f_\nu = 0$ です。つまり、非粘性流体では流速 u は流路断面内で一様です。

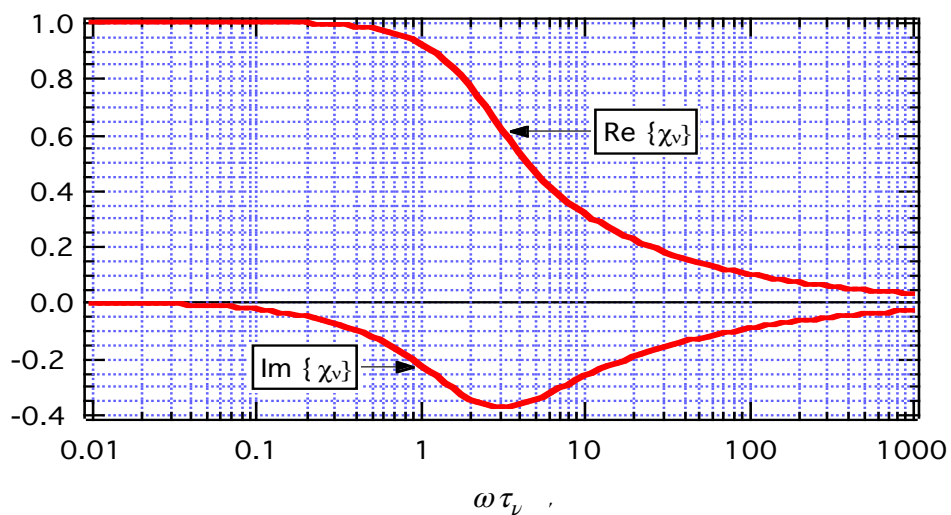
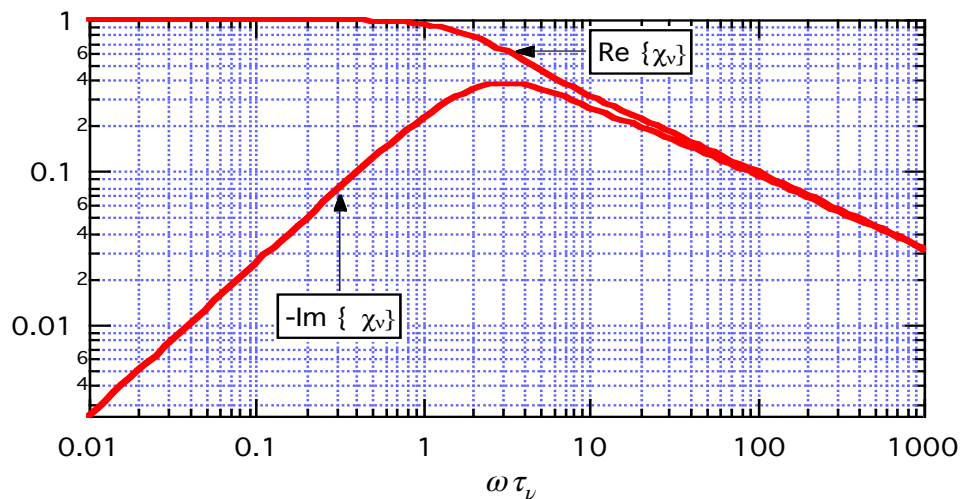


図3.1 χ_ν の $\omega \tau_\nu$ 依存性：下図は片対数表示、上図は両対数表示です。上図のほうが漸近線の様子がわかり易い。

複素数 $(1-f_\nu)/(1-\chi_\nu)$ が実数になる場合がある。 $\omega \rightarrow \infty$ の極限あるいは非粘性流体 ($\nu = 0$) では、 $\lambda_\nu = 0$ なので $(1-f_\nu)/(1-\chi_\nu) = 1$ です。 $\omega \rightarrow 0$ の極限では $(1-f_\nu)/(1-\chi_\nu)$ は実数で $(r/r_0)^2$ に比例する。これはポアズイユ流です。

χ_ν の $\omega\tau_\nu$ 依存性を図3.1に示す。横軸は対数表示です。

図3.1の上図からは漸近式の様子が判る。低周波数 $\omega\tau_\nu \ll \pi$ の漸近式は

$$\chi_\nu = 1 - i \frac{\omega\tau_\nu}{4} \quad (3.6)$$

です。高周波数 $\omega\tau_\nu \gg \pi$ の漸近式は

$$\chi_\nu = (1-i) \sqrt{\frac{1}{\omega\tau_\nu}} \quad (3.7)$$

です。粘性境界層の厚さ

$$\delta_\nu \equiv \frac{2\nu}{\omega}$$

を導入すると

$$\sqrt{\frac{1}{\omega\tau_\nu}} = \frac{\delta_\nu}{r_0}$$

なので、高周波数 $\omega\tau_\nu \gg \pi$ の(3.7)は

$$\chi_\nu = (1-i) \frac{\delta_\nu}{r_0}$$

となり、太い管とも呼ばれる。高周波数 $\omega\tau_\nu \gg \pi$ は $\delta_\nu/r_0 \ll 1/1.7$ に対応するからです。

流路断面内で平均することで、3次元空間の運動量保存則を一次元化したものが(3.3)です。一次元化した運動量保存則(3.3)を変形すると、

$$\nabla p = - \frac{i\omega}{1-\chi_\nu} \rho_m \langle u \rangle_r \quad (3.8)$$

すなわち

$$\nabla p = - \frac{1}{1-\chi_\nu} \rho_m \frac{\partial \langle u \rangle_r}{\partial t}$$

です。

単位体積当たりの運動エネルギー $(1/2)\rho_m \langle \hat{u} \rangle_r^2$ の粘性による散逸の流路断面平均は

$$\langle \langle \nabla p \cdot u \rangle_t \rangle_r = \langle \nabla p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t = - \Im \left(\frac{1}{1-\chi_\nu^\dagger} \right) \omega \frac{1}{2} \rho_m \langle \hat{u} \rangle_r^2 < 0 \quad (3.9)$$

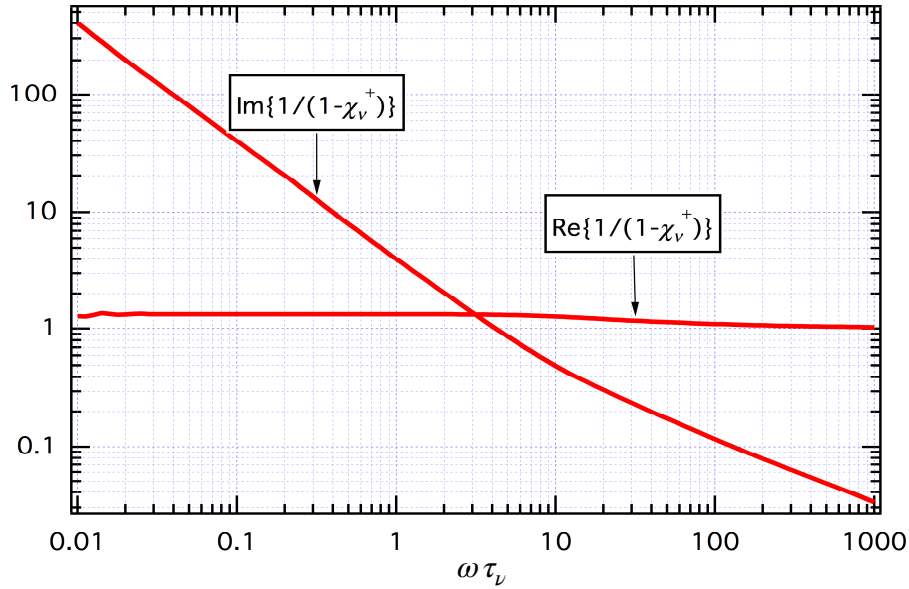


図3.2 $1/(1-\chi_\nu^\dagger)$ の $\omega\tau_\nu$ 依存性： $1/(1-\chi_\nu^\dagger)$ の実部は $\omega\tau_\nu \ll \pi$ では $4/3$ に近く、 $\omega\tau_\nu \gg \pi$ では 1 に近い。 $1/(1-\chi_\nu^\dagger)$ の虚部は $\omega\tau_\nu$ の減少関数。 $\omega\tau_\nu \ll \pi$ では $\omega\tau_\nu$ に反比例し、 $\omega\tau_\nu \gg \pi$ では $\omega\tau_\nu$ の平方根に反比例している。

です。以下では(3.9)を粘性散逸と呼ぶ。 \Im は虚部を示す。非粘性流体 ($\nu = 0$) では、 $\chi_\nu = 0$ なので粘性散逸は零です。

$1/(1-\chi_\nu^\dagger)$ の $\omega\tau_\nu$ 依存性を図3.2に示す。粘性散逸は $\omega\tau_\nu$ の減少関数であり、 $\omega\tau_\nu$ が小さいところでは粘性散逸が大きい。低周波数 $\omega\tau_\nu \ll \pi$ の漸近式は

$$\frac{1}{1-\chi_\nu^\dagger} \simeq \frac{4}{3} + i\frac{4}{\omega\tau_\nu} \quad (3.10)$$

ですが、高周波数 $\omega\tau_\nu \gg \pi$ の漸近式は

$$\frac{1}{1-\chi_\nu^\dagger} \simeq \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\omega\tau_\nu}}\right) + i\sqrt{\frac{1}{\omega\tau_\nu}} \quad (3.11)$$

です。また、(3.11)は $\delta_\nu/r_0 \ll \sqrt{1/\pi}$ の1次式です。

圧力勾配 ∇p と圧力 p との比 $\nabla p/p$ は複素音響インピーダンス $p/\langle u \rangle_r$ に反比例する。

(3.8)を変形すると、

$$\frac{\nabla p}{p} = -\frac{i\omega}{1-\chi_\nu} \rho_m \frac{\langle u \rangle_r}{p}$$

だからです。複素音響インピーダンス $p/\langle u \rangle_r$ が大きいほど $\nabla p/p$ が小さい。

$\omega\tau_v$ の関数として f_v や χ_v の値を調べるには電子式デジタルコンピュータの出現が必要だった。低周波数 $\omega\tau_v \ll \pi$ あるいは高周波数 $\omega\tau_v \gg \pi$ では級数展開が役立つが、 $1 < \omega\tau_v < 10$ では級数展開の収束が悪いからです。1949年に拡張キルヒホッフ理論を提唱したクラマースは $\omega\tau_v$ の関数として χ_v の値を詳細に調べるのが困難だった。日本で1970年頃まで使われたタイガー計算機などの機械式計算機では計算速度が遅すぎる。

電子式デジタルコンピュータのための数値計算用プログラム言語FORTRANが誕生したのは1956年のことです。タコニス振動の安定限界を議論したロットの1969年論文は、 $\omega\tau_v$ の関数として χ_v の値を詳細に調べるのが可能になったことの成果です。同じ1969年には、アポロ11号に搭乗した宇宙飛行士が月面に到達した。

管内流体の振動圧力や振動流速が観測可能となったのは20世紀末のことです。小型圧力センサーの応答速度が上がっただけでなく、レーザーを光源とするレーザードップラー流速計が出現したからです。ルビーレーザーによるパルス発振やヘリウムネオンレーザーによる連続発振に初めて成功したのは1960年のことです。レーザードップラー流速計の開発が始まったのは1970年頃からです。

ループ管を用いた熱音響自励振動に初めて成功した矢崎ら²⁾は、圧力 p と流速 u を同時測定し、ループ管中の音波が純粋な定在波ではなくて進行波を含むとの観測結果を報告しただけでなく、拡張キルヒホッフ理論に基づく数値シミュレーションの結果が観測結果を再現することも示した。

3.2.2 質量保存則

質量保存則の数式表現は、流体力学では、連続の式と呼ばれている。

質量保存則の線型近似

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho_m u) = 0$$

の右辺のゼロは質量保存則すなわち質量生成密度の値がゼロを意味する。

²⁾ T.Yazaki and A.Tominaga: *Measurement of Sound Generation in Thermoacoustic Oscillations*, Proc.Roy.Soc.London **A454**, pp.2113-2122 (1998); T.Yazaki, A.Iwata, T.Maekawa and A.Tominaga: *Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube*, Pays.Rev.Letters **81**(15), pp.3128-3131(12 Oct 1998)

密度の全微分の線形近似

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\nabla\rho_m$$

によれば、 $d\rho/dt$ は密度勾配 $\nabla\rho_m = -\rho_m\beta\nabla T_m$ を通して、温度勾配 ∇T_m に依存する。

キルヒホッフ理論では $\nabla T_m = 0$ なので $\nabla\rho_m = 0$ ですが、拡張キルヒホッフ理論では $\nabla T_m \neq 0$ なので $\nabla\rho_m \neq 0$ です。

流体要素が温度勾配に沿って運動すると、熱膨張によりその体積が変化する。このことは、以下に述べるように、熱音響熱機関にとって本質的に重要です。

質量保存則の線型近似は、密度の全微分の線形近似を使って書き換えると

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho_m \nabla u = 0$$

すなわち

$$\nabla u = -\frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho}{dt}$$

です。

局所平衡の仮定に基づいて密度の微小変化 $d\rho$ を圧力の微小変化 dp とエントロピーの微小変化 dS で表現すると、

$$d\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S dp + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_p dS$$

すなわち

$$\frac{d\rho}{\rho_m} = K_S dp - \frac{\beta T_m}{C_p} dS$$

です。

これを使うと、質量保存則の線型近似は

$$K_S \frac{dp}{dt} - \frac{\beta T_m}{C_p} \frac{dS}{dt} + \nabla u = 0$$

です。時間平均圧力が一様 ($\nabla p_m = 0$) なので、これは

$$K_S \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\beta T_m}{C_p} \frac{dS}{dt} + \nabla u = 0 \quad (3.12)$$

と同じです。振動運動する流体のエントロピーが不変 ($dS/dt = 0$) の場合には、

(3.12)は

$$K_S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla u = 0$$

となるが、熱音響現象では、第2章で述べたように、エントロピー変動 dS/dt が重要です。

質量保存則の線型近似(3.12)は未だ3次元空間の質量保存則です。これを1次元化するには、エネルギー保存則を使って $d\langle S \rangle_r / dt$ を調べることが必要です。

質量保存則の線型近似(3.12)に p を乗じて時間平均し、 $\langle p \cdot \partial p / \partial t \rangle_t = 0$ に注意すると、

$$\langle p \cdot \nabla u \rangle_t = \frac{\beta T_m}{C_p} \left\langle p \cdot \frac{dS}{dt} \right\rangle_t$$

です。すなわち、 $\langle p \cdot \nabla u \rangle_t$ は第2章の流体の運動による熱から仕事へのエネルギー変換密度に等しい。これを流路断面内で平均すると

$$\langle \langle p \cdot \nabla u \rangle_t \rangle_r = \langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t = \frac{\beta T_m}{C_p} \left\langle p \cdot \frac{d\langle S \rangle_r}{dt} \right\rangle_t \quad (3.13)$$

です。

$\langle \langle p \cdot \nabla u \rangle_t \rangle_r$ は、熱から仕事へのエネルギー変換密度の流路断面内平均に等しく、熱膨張率 β に比例している。従って、 $\beta = 0$ の流体では熱から仕事へのエネルギー変換が生じない。

3.2.3 流体物理学のエネルギー保存則：熱輸送の一般式

最後にエネルギー保存則を議論する。

エネルギー保存則の数式表現は様々です。前掲のランダウ・リフシッツ共著竹内均訳『流体力学1』（東京出版、1970）の第5章では質量保存則を考慮したエネルギー保存則のエントロピー表示を熱輸送の一般式と呼んでいる。このエネルギー保存則には流体の運動とは関わりの無い単純熱伝導によるエネルギー輸送が含まれていないことに注意して欲しい。

熱輸送の一般式の線形近似は

$$\rho_m T_m \frac{dS}{dt} - \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.14)$$

です。ここで κ は熱伝導度です。これは線形近似なので、振動量について2次以上の項は無視されている。左辺第1項は、単位体積当たりの熱エネルギーの時間変化をエントロピー S の時間変化で表現したものです。第2項は、流路断面内での熱伝導による熱流 $-\kappa \partial T / \partial r$ の湧き出しです。(3.14)を熱エネルギーの保存則と見做すなら、右辺のゼロは熱エネルギーの生成密度がゼロであることを意味する。

全微分 dS/dt を T の偏微分 $\partial T/\partial t$ と p の偏微分 $\partial p/\partial t$ とで表現すると

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C_p}{T_m} \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \nabla T_m - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad (3.15)$$

です。このことを示す。まず、局所平衡の仮定に基づいて振動エントロピー S を振動温度 T と振動圧力 p で表現した

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \left[dT - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s dp \right]$$

を使うと

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C_p}{T_m} \left[\frac{dT}{dt} - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dt} \right]$$

となる。最後に、

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \nabla T_m$$

と

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \nabla p_m$$

と

$$\nabla p_m = 0$$

に注意すると(3.15)が得られる。

熱輸送の一般式の線形近似(3.14)の dS/dt に、(3.15)を代入して整理すると、

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t} - u \nabla T_m \quad (3.16)$$

となる。ここで、

$$\alpha \equiv \frac{\kappa}{\rho_m C_p}$$

は熱拡散係数です。(3.16)も熱輸送の一般式の線形近似です。

(3.16)の右辺は、流体の運動が断熱過程の場合の観測点での温度の時間変化です。なぜなら、要素流体の運動には位置不変の圧力変化 $\partial p/\partial t$ と圧力不変の移動 ξ とがある。観測点での圧力変化 $\partial p/\partial t$ が断熱過程の場合には、 $\partial p/\partial t$ による温度変化は $(\partial T/\partial p)_s \partial p/\partial t$ です。流体の移動が断熱過程の場合には、観測点に移動してきた要素流体の温度は $T_m - \xi \nabla T_m$ です。 $-u \nabla T_m$ は $T_m - \xi \nabla T_m$ の時間変化です。

3.2.3.1 温度変動

熱輸送の一般式の線形近似(3.16)を使って、径方向の解 $T(r)$ を求めたい。

熱輸送の一般式の線形近似は r について2階の偏微分方程式なので境界条件は二つです。一つは、管壁に接している($r = r_0$)流体の温度はが時刻に依らないこと $T(r_0) = 0$ です。これは、管壁の熱容量が大きいことの結果で、管壁に接している流体の温度は壁の温度 T_m に等しい。二つ目は、振動温度 T が軸対称で軸が振動温度 T の特異点にならないことすなわち $\partial T/\partial r|_{r=0} = 0$ です。

(3.16)の解は、後に示すように、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (1 - f_\alpha) \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{(1 - f_\alpha) - (1 - f_\nu) \text{Pr}}{1 - \text{Pr}} \cdot \frac{\langle u \rangle_r \nabla T_m}{1 - \chi_\nu} \quad (3.17)$$

です。ここで

$$\text{Pr} \equiv \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\tau_\alpha}{\tau_\nu} = \frac{\delta_\nu}{\delta_\alpha}$$

はプラントル数です。 $\text{Pr} = 0$ は非粘性流体 $\nu = 0$ すなわち $\tau_\nu = \infty$ を意味する。実在気体では $\text{Pr} \sim 2/3$ です。解(3.17)が複雑なのは、流速 u の流路断面内分布が粘性のために一様ではないことの反映です。実際、 $\text{Pr} = 0$ では、(3.17)は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (1 - f_\alpha) \left[\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t} - \langle u \rangle_r \nabla T_m \right]$$

なので、温度変動 T の流路断面内分布は $1 - f_\alpha$ に比例する。

(3.16)の解が(3.17)であることを示す。

まず、キルヒホッフ理論に対応する一様温度 $\nabla T_m = 0$ の場合から始める。 $\nabla T_m = 0$ の場合には、(3.16)は

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t}$$

となる。これは境界条件も含めてナビエ・ストークスの方程式の線形近似と同じ形なので、解 $T(r)$ は $1 - f_\alpha$ に比例し

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (1 - f_\alpha) \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t}$$

です。ただし

$$f_\alpha \equiv \frac{J_0(\lambda_\alpha \frac{r}{r_0})}{J_0(\lambda_\alpha)}$$

$$\lambda_\alpha \equiv (1 - i) \sqrt{\omega \tau_\alpha}$$

です。ここで、

$$\tau_\alpha \equiv \frac{r_0^2}{2\alpha}$$

は流体の熱拡散係数 α と流路半径 r_0 とから作られる熱緩和時間です。熱緩和時間が太さの2乗に比例していることは、中華料理の炒め物では重要です。食材を細く刻むのは短時間で芯まで加熱するためです。

$\omega\tau_\alpha$ は粘性緩和時間 τ_α で無次元化した角周波数です。今後は、 $\omega\tau_\nu$ の代わりに $\omega\tau_\alpha$ を無次元化した角周波数とする。熱音響現象では粘性緩和時間 τ_ν よりも熱緩和時間 τ_α のほうが本質的に重要だからです。

熱緩和時間と熱境界層の厚さ

$$\delta_\alpha \equiv \frac{2\alpha}{\omega}$$

との関係は

$$\sqrt{\frac{1}{\omega\tau_\alpha}} = \frac{\delta_\alpha}{r_0}$$

です。高周波数 $\omega\tau_\alpha \gg 4$ は $\delta_\alpha/r_0 \ll 1/2$ に対応する。

次に、拡張キルヒホッフ理論に対応する $\nabla T_m \neq 0$ の場合を議論する。この場合には、

$$u = \frac{1-f_\nu}{1-\chi_\nu} \langle u \rangle_r$$

が r の関数なので複雑ですが、 T の r/r_0 依存性は $1-f_\alpha$ と $1-f_\nu$ とを通して表現されるに相違ない。偏微分方程式(3.16)は線型なので、 r/r_0 に依らない二つの未知数 A と N とを使って、 $1-f_\alpha$ と $1-f_\nu$ の線形結合

$$T = (1-f_\alpha)A + (1-f_\nu)N \quad (3.18)$$

を仮定してみる。実際、(3.16)の左辺の T に(3.18)の T を代入し、ベッセル関数の性質

$$\frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} \right) = i\omega f_\alpha$$

などを使うと、(3.16)が A と N で表現できる。この表現が任意の r/r_0 で成り立つための必要充分条件は

$$i\omega A = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{1-\text{Pr}} \frac{\langle u \rangle_r \nabla T_m}{1-\chi_\nu}$$

と

$$i\omega N = \frac{\text{Pr}}{1-\text{Pr}} \frac{\langle u \rangle_r \nabla T_m}{1-\chi_\nu}$$

の二つです。これらを(3.18)に代入すると(3.17)が得られる。これで(3.16)の解が(3.17)であることが示された。

温度 T の全微分の線形近似

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \nabla T_m$$

すなわち

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1-f_\nu}{1-\chi_\nu} \langle u \rangle_r \nabla T_m$$

は、(3.17)を使うと、

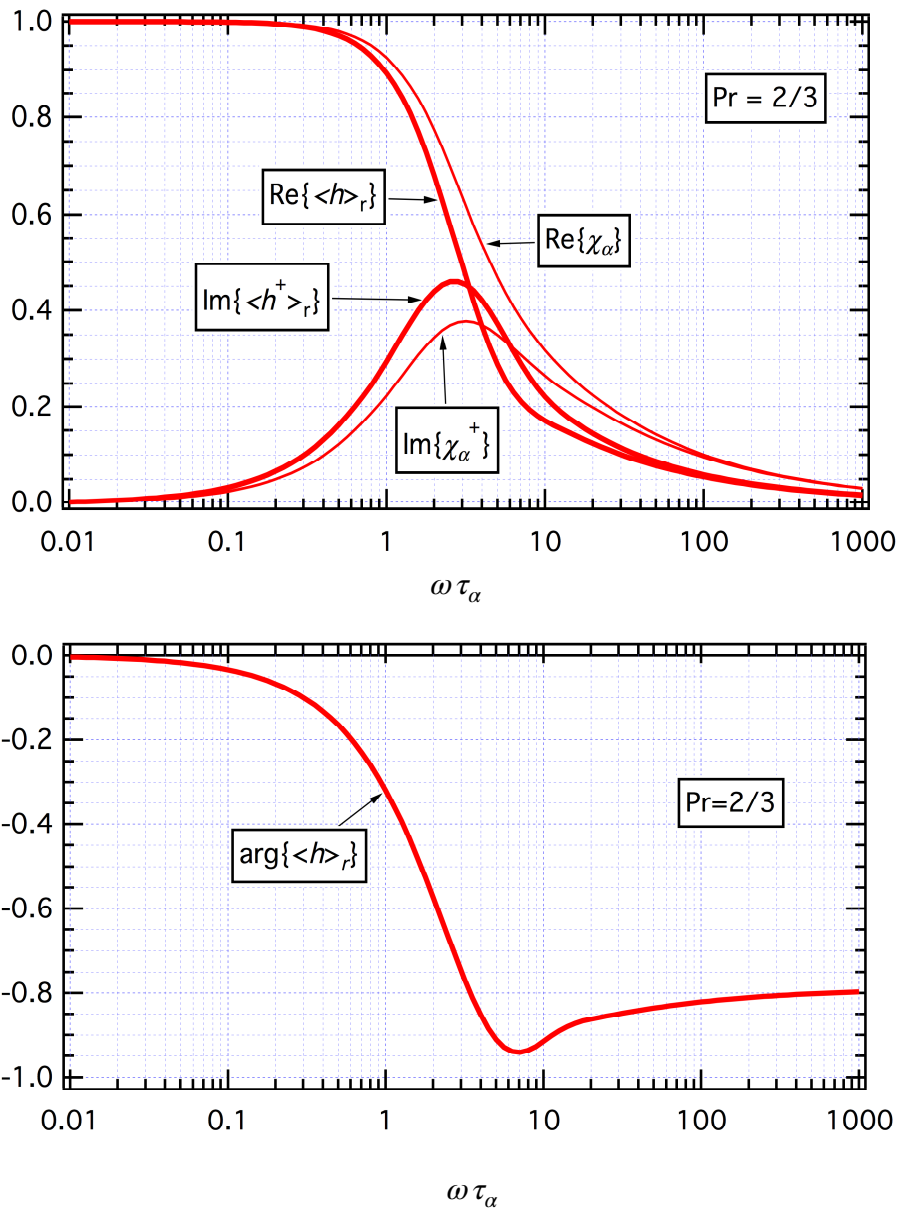


図3.4 $\langle h \rangle_r$ の $\omega \tau_\alpha$ 依存性：プラントル数の値が2/3の場合である。比較のために χ_α も載せた。 h^+ は h の複素共役なので、 $\Im\langle h^+ \rangle_r > 0$ です。 $\langle h \rangle_r$ の位相角 $\arg\langle h \rangle_r$ は負で、 $\omega \tau_\alpha$ が大きい所では $-\pi/4$ に漸近する。 $\omega \tau_\alpha \simeq \pi$ で $\arg\langle h \rangle_r \simeq -\pi/4$ です。

$$\frac{dT}{dt} = (1 - f_\alpha) \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \frac{\partial p}{\partial t} + h \langle u \rangle_r \nabla T_m \quad (3.19)$$

です。ここで

$$h \equiv \frac{f_\alpha - f_\nu}{(1 - \text{Pr})(1 - \chi_\nu)}$$

は数式表現を見やすくするために導入した r/r_0 の関数です。非粘性流体 ($\text{Pr} = 0$) では、 $f_\nu = 0$ と $\chi_\nu = 0$ なので、 $h = f_\alpha$ です。

温度変動の流路断面内平均 $\langle T \rangle_r$ は、(3.19) から、

$$\frac{d\langle T \rangle_r}{dt} = (1 - \chi_\alpha) \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \frac{\partial p}{\partial t} + \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \nabla T_m \quad (3.20)$$

です。これは1次元化されている。

実在気体に対応してプラントル数 Pr の値が $2/3$ の場合に、

$$\langle h \rangle_r \equiv \frac{\chi_\alpha - \chi_\nu}{(1 - \text{Pr})(1 - \chi_\nu)} \quad (3.21)$$

の $\omega\tau_\alpha$ 依存性を図3.4に図示する。比較のために χ_α も載せた。非粘性 ($\text{Pr} = 0$ 、 $\chi_\nu = 0$) の場合には $\langle h \rangle_r = \chi_\alpha$ です。特に、 $\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ で $\arg \langle h \rangle_r \simeq -\pi/4$ に注意して欲しい。

3.2.3.2 エントロピー変動とその応用

エントロピー変動は

$$\frac{dS}{dt} = -f_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} + h \frac{C_p}{T_m} \langle u \rangle_r \nabla T_m \quad (3.22)$$

です。右辺第1項は $\partial S / \partial t$ を表し、第2項は $u \nabla S_m$ を表している。(3.22) を導くには、エントロピー S の全微分

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C_p}{T_m} \left[\frac{dT}{dt} - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad (3.15)$$

の dT/dt に

$$\frac{dT}{dt} = (1 - f_\alpha) \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \frac{\partial p}{\partial t} + h \langle u \rangle_r \nabla T_m \quad (3.19)$$

を代入してから、第2章で使った平衡状態の熱力学の恒等式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_p = \frac{\beta T_m}{\rho_m C_p} = \frac{(\gamma - 1) K_S}{\beta} \quad (2.5)$$

を使えばよい。

エントロピー変動(3.22)は有用です。

まず、(3.22)の流路断面内平均は

$$\frac{d\langle S \rangle_r}{dt} = -\chi_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} + \langle h \rangle_r \frac{C_p}{T_m} \langle u \rangle_r \nabla T_m \quad (3.23)$$

です。これは、熱輸送の一般式の線型近似(3.15)を1次元化したもので、第4章で仕事源の議論に使う。

次に、(3.22)を時間で積分すると、エントロピーの振動部分は

$$S = -f_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} p + h \frac{C_p}{T_m} \langle \xi \rangle_r \nabla T_m \quad (3.24)$$

です。これは第4章で振動運動に伴うエントロピー流密度 $\rho_m \langle \langle S \cdot u \rangle_t \rangle_r$ の議論に使う。

最後に、エネルギー保存則を考慮した質量保存則の線形近似は

$$\left[1 + (\gamma - 1) \chi_\alpha \right] K_S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \langle u \rangle_r - \langle h \rangle_r \beta \langle u \rangle_r \nabla T_m = 0 \quad (3.25)$$

となる。これは1次元化されていて、後に、 $\langle u \rangle_r$ の軸方向変化 ∇u を調べる際に役立つ。(3.25)を導くには、質量保存則の線形近似

$$K_S \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\beta T_m}{C_p} \frac{dS}{dt} + \nabla u = 0 \quad (3.12)$$

の dS/dt にエネルギー保存則(3.22)を代入して

$$\left[K_S + f_\alpha \frac{\beta^2 T_m}{\rho_m C_p} \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla u + h \beta \langle u \rangle_r \nabla T_m = 0$$

とする。さらに、流路断面内で平均すると、(3.25)となる。ここでも、第2章で使った平衡状態の熱力学の恒等式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P = \frac{\beta T_m}{\rho_m C_p} = \frac{(\gamma - 1) K_S}{\beta} \quad (2.5)$$

を使った。

(3.25)の両辺を $\langle u \rangle_r$ で割ると

$$\frac{\nabla \langle u \rangle_r}{\langle u \rangle_r} = -i\omega \left[1 + (\gamma - 1) \chi_\alpha \right] K_S \frac{P}{\langle u \rangle_r} + \langle h \rangle_r \beta \nabla T_m$$

です。右辺第1項は複素インピーダンス $P/\langle u \rangle_r$ に比例する。 ∇T_m に比例している右辺第2項は熱音響熱機関の蓄熱器で重要です。

∇T_m が充分大きいため右辺の第1項が第2項に比べて無視できる場合には

$$\frac{\nabla \langle u \rangle_r}{\langle u \rangle_r} = \langle h \rangle_r \beta \nabla T_m$$

です。さらに理想気体近似が良い近似の場合には $\beta = 1/T_m$ なので

$$\frac{\nabla \langle u \rangle_r}{\langle u \rangle_r} = \langle h \rangle_r \frac{\nabla T_m}{T_m}$$

です。

3.3 一様温度の場合：キルヒホッフ理論

ここでは $\nabla T_m = 0$ の場合を議論する。 $\nabla T_m = 0$ なのでキルヒホッフ理論です。

1次元化した運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u \rangle_r = - (1 - \chi_\nu) \frac{\nabla p}{\rho_m} \quad (3.3)$$

は ∇T_m とは関係ないが、1次元化した質量保存則

$$\left[1 + (\gamma - 1) \chi_\alpha \right] K_S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \langle u \rangle_r - \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \beta \nabla T_m = 0 \quad (3.25)$$

は ∇T_m に依存する。 $\nabla T_m = 0$ の場合には(3.25)は

$$\left[1 + (\gamma - 1) \chi_\alpha \right] K_S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \langle u \rangle_r = 0 \quad (3.26)$$

です。

ここでは、一様温度 ($\nabla T_m = 0$) の管内音波を議論するので、(3.3)と(3.26)を使う。

3.3.1 管内音波の分散

波の位相速度や振幅減衰率の周波数依存性は分散と呼ばれている。波数 k と角周波数 ω との関係が分散関係です。特に、位相速度 $\omega/\Re k$ が ω や k に依存する場合に分散が存在すると言われる。例えば、太陽光を硝子プリズムに通すと虹の7色に分かれるのは硝子中では光の伝搬速度が周波数に依存するためです。クントが気付いたように、一様温度 ($\nabla T_m = 0$) の管内音波でも分散が存在する。

ここでは一様温度 ($\nabla T_m = 0$) の管内を z 方向に進む圧力波

$$p = \hat{p} \exp i(\omega t - kz + \theta)$$

を想定する。

管内音波の分散を議論するには、

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1 - \chi_\nu}{1 + (\gamma - 1) \chi_\alpha} a_S^2 \nabla^2 p = 0 \quad (3.27)$$

を使う。(3.3)と(3.26)の両者から $\langle u \rangle_r$ を消去し、断熱音波の音速 a_S を使うと $a_S^2 \rho_m K_S = 1$ であることを使うと(3.27)が得られる。(3.27)もキルヒホッフ理論の結果です。

(3.27)に $\nabla p = -ikp$ 、 $\partial p/\partial t = i\omega p$ を使うと、

$$\left(\frac{k}{k_S}\right)^2 = \frac{1 + (\gamma - 1)\chi_\alpha}{1 - \chi_\nu} \quad (3.28)$$

です。右辺が複素数なので k も複素数です。これを使うと、 $\omega\tau_\alpha$ の関数として波数 k が一意的に決まる。分散は波数 k の ω 依存性なので、(3.28)は分散関係です。

$\nabla p = -ikp$ 、 $\partial p/\partial t = i\omega p$ を使い、断熱音波の波数 $k_S = \omega/a_S$ を使うと、 $a\Re k = a_S k_S$ なので

$$\frac{a}{a_S} = \frac{k_S}{\Re k} > 0$$

は断熱音波の音速 a_S で規格化した音速です。進行波の減衰定数は $-\Im k \geq 0$ なので、 $-\Im k/k_S \geq 0$ は k_S で規格化した減衰定数です。

(3.30)を使って分散を具体的に調べるにあたり、高周波数 $\omega\tau_\alpha \gg \pi$ の場合と低周波数 $\omega\tau_\alpha \ll \pi$ の場合とに分けて議論する。

まず、高周波数 $\omega\tau_\alpha \gg \pi$ の場合を調べる。この場合には1に比べて小さい χ_α と χ_ν について1次までの近似で、(3.30)は、

$$\left(\frac{k}{k_S}\right)^2 = \frac{1 + (\gamma - 1)\chi_\alpha}{1 - \chi_\nu} \simeq 1 + (\gamma - 1)\chi_\alpha + \chi_\nu = 1 + \left(\gamma - 1 + \frac{\chi_\nu}{\chi_\alpha}\right)\chi_\alpha$$

です。更に

$$\chi_\nu \simeq (1 - i)\sqrt{\frac{1}{\omega\tau_\nu}}$$

と

$$\chi_\alpha \simeq (1 - i)\sqrt{\frac{1}{\omega\tau_\alpha}}$$

とを使うと

$$\left(\frac{k}{k_S}\right)^2 \simeq 1 + (\gamma - 1 + \sqrt{\text{Pr}})(1 - i)\sqrt{\frac{1}{\omega\tau_\alpha}} \quad (3.29)$$

です。従って、 $\omega\tau_\alpha \gg \pi$ の場合の分散関係は、(3.29)から、

$$\frac{k}{k_S} \simeq 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1 + \sqrt{\text{Pr}})\sqrt{\frac{1}{\omega\tau_\alpha}} - i\frac{1}{2}(\gamma - 1 + \sqrt{\text{Pr}})\sqrt{\frac{1}{\omega\tau_\alpha}} \quad (3.30)$$

です。すなわち、 k/k_S の実部は1より少し大きく、虚部は

$$\sqrt{\frac{1}{\omega\tau_\alpha}} = \frac{\delta_\alpha}{r_0} \ll 1$$

に比例する。

次に、低周波数 $\omega\tau_\alpha \ll \pi$ の場合を調べる。この場合には

$$\chi_\alpha \simeq 1 + i\mathfrak{I}\chi_\alpha \quad \text{と} \quad \chi_\nu \simeq 1 + i\mathfrak{I}\chi_\nu$$

に注意すると、1に比べて小さい $\mathfrak{I}\chi_\alpha$ と $\mathfrak{I}\chi_\nu$ について1次までの近似で、(3.30)は

$$\left(\frac{k}{k_S}\right)^2 = \frac{1 + (\gamma - 1)\chi_\alpha}{1 - \chi_\nu} \simeq \frac{\gamma + i(\gamma - 1)\mathfrak{I}\chi_\alpha}{-i\mathfrak{I}\chi_\nu}$$

です。更に右辺の分子の $(\gamma - 1)\mathfrak{I}\chi_\alpha$ を γ に対して無視し、

$$\mathfrak{I}\chi_\nu \simeq -\frac{\omega\tau_\nu}{4}$$

を使うと

$$\left(\frac{k}{k_S}\right)^2 \simeq -i\frac{4\gamma}{\omega\tau_\nu} \quad (3.31)$$

です。従って、 $\omega\tau_\alpha \ll \pi$ の場合の分散関係は、(3.31)から、

$$\frac{k}{k_S} \simeq \sqrt{\frac{2\gamma}{\omega\tau_\nu}}(1 - i) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\text{Pr}\omega\tau_\alpha}}(1 - i) \quad (3.32)$$

です。すなわち、 k/k_S は実部も虚部も $\sqrt{\omega\tau_\nu}$ に反比例する。

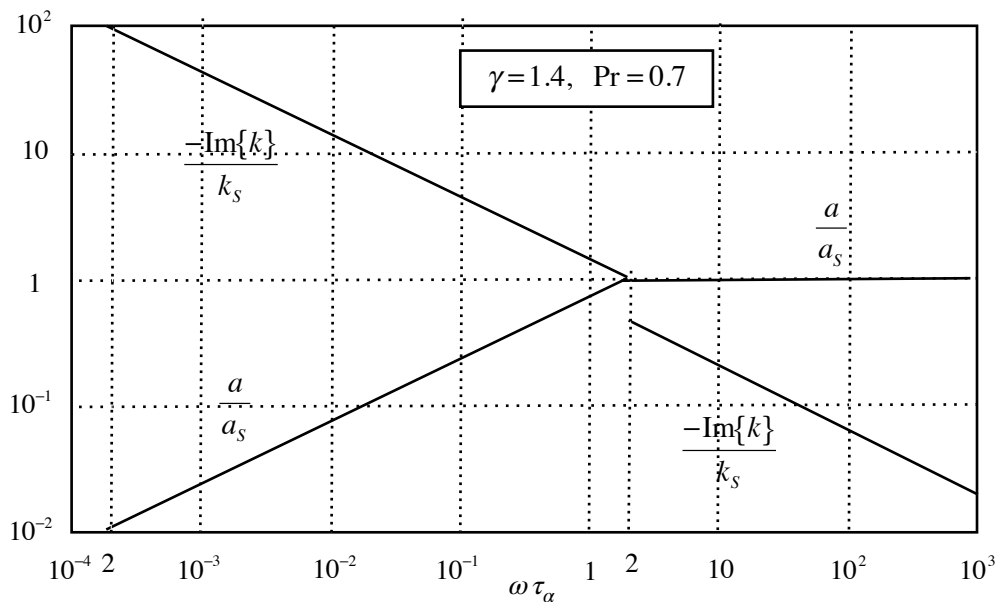


図3.5 断熱音速 a_S で規格化した音速 a/a_S と段越音波の波数 k_S で規格化した減衰定数 $-\mathfrak{I}k/k_S$ の $\omega\tau_\alpha$ 依存性： $\omega\tau_\alpha \ll \pi$ と $\omega\tau_\alpha \gg \pi$ で意味のある漸近線を $\omega\tau_\alpha = 2$ まで外挿してある。乾燥空気を想定して $\gamma = 1.4$ 、 $\text{Pr} = 0.7$ とした。

高周波数 $\omega\tau_\alpha \gg \pi$ の場合の分散関係(3.30)と低周波数 $\omega\tau_\alpha \ll \pi$ の場合の分散関係(3.32)とはかなり異なる。断熱音速 a_S で規格化した音速 $a/a_S \equiv k_S/\Re k$ と段越音波の波数 k_S で規格化した減衰定数 $-\Im k/k_S$ の $\omega\tau_\alpha$ 依存性の漸近線を図3.5に図示する。 $\omega\tau_\alpha \ll \pi$ と $\omega\tau_\alpha \gg \pi$ で意味のある漸近線を $\omega\tau_\alpha = 2$ まで外挿してある。

管内音波の分散を2004年頃に実験的に調べたのは矢崎ら³です（実験の詳細は2007年論文⁴）。矢崎らは進行波を調べるために、他端からの反射波が影響しないように長い円筒管を用いた。その実験結果は、 $\pi/10 \leq \omega\tau_\alpha \leq 10\pi$ の領域も含めて(3.30)を支持した。高周波数 $\omega\tau_\alpha \gg \pi$ では先行研究があるが、低周波数 $\omega\tau_\alpha \ll \pi$ では矢崎の実験が最初です。矢崎の実験が優れているのは $\omega\tau_\alpha$ の領域が広く $2 \times 10^{-4} \leq \omega\tau_\alpha \leq 10^2$ にわたることです。これだけ広い領域で $\pi/10 \leq \omega\tau_\alpha \leq 10\pi$ の領域も含めて、実験結果はキルヒホッフ理論の結果(3.30)を支持した。このことは、(3.8)と(3.26)を支持する強力な実験的根拠です。

一様温度（ $\nabla T_m = 0$ ）の管内を一方向に進む音波では、波数 k だけで無く、 p と $\langle \xi \rangle_r$ との位相差 θ と流路断面内で平均した流速振幅 $\langle \hat{u} \rangle_r$ も $\omega\tau_\alpha$ の関数です。

このことを示す。 z 軸の正方向へ進む管内音波の振動圧力を

$$p = \hat{p} \exp i(\omega t - kz + \theta) \quad (3.33)$$

振動流速の流路断面内平均を

$$\langle u \rangle_r = \langle \hat{u} \rangle_r \exp i(\omega t - kz + \pi/2) \quad (3.34)$$

とする。これは

$$\langle \xi \rangle_r = \langle \hat{\xi} \rangle_r \exp i(\omega t - kz)$$

と

$$\langle \hat{u} \rangle_r = \omega \langle \hat{\xi} \rangle_r$$

の表れです。

(3.26)の p に(3.33)を代入し、 $\nabla \langle u \rangle_r = -ik \langle u \rangle_r$ を使うと、

³ 矢崎太一：細管内の音波伝播と熱音響現象、ながれ**24** (2005) pp.393-404

⁴ T. Yazaki, Y. Tashiro and T. Biwa: *Measurements of sound propagation in narrow tubes*, Proc. R. Society **A 463** (2007) pp.2855-2862

$$\langle u \rangle_r = \left[1 + (\gamma - 1) \chi_\alpha \right] K_S \frac{\omega}{k} \hat{p} \exp i(\omega t - kz + \theta)$$

つまり

$$\langle u \rangle_r = \langle \hat{u} \rangle_r \hat{p} \exp i \left[\omega t - kz + \theta + \arg \left[1 + (\gamma - 1) \chi_\alpha \right] - \arg k \right]$$

ただし

$$\langle \hat{u} \rangle_r = \left| 1 + (\gamma - 1) \chi_\alpha \right| K_S \frac{\omega}{|k|} \hat{p} \quad (3.35)$$

です。これを(3.34)と比較すると、

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arg \left[1 + (\gamma - 1) \chi_\alpha \right] + \arg k \quad (3.36)$$

です。つまり進行波の $\langle \hat{u} \rangle_r$ と \hat{p} の関係(3.35)と θ は χ_α と k で決まる。 $\omega \tau_\alpha \rightarrow \infty$ の極限では $\theta \rightarrow \pi/2$ です。

3.3.2 2センサー法

一様温度 ($\nabla T_m = 0$) の管の中の音場を調べる一つの方法に2センサー法がある。管軸に沿う軸座標 z の原点 $z = 0$ を挟む2点、 $z = \Delta$ と $z = -\Delta$ に圧力センサーを設置し、この2点での同時測定の結果から管の中の音場を推定する。

管内音波は、線形近似では、 z 軸の正方向へ進む波と負方向へ進む波との重ね合わせです。

角周波数 ω で振動する音場の、 z 依存性を無次元実数 $F(z)$ とし、

$$p(z) = F(z) \hat{p} \exp i(\omega t + \theta)$$

$$\langle u \rangle_r = F(z) \langle \hat{u} \rangle_r \exp i(\omega t + \pi/2)$$

とする。位相差 θ は一様で(3.36)です。 $\langle \hat{u} \rangle_r$ と \hat{p} の関係は

$$\langle \hat{u} \rangle_r = \left| 1 + (\gamma - 1) \chi_\alpha \right| K_S \frac{\omega}{|k|} \hat{p} \quad (3.35)$$

です。

管内音場は z 軸の正方向へ進む波と負方向へ進む波との重ね合わせなので、

$$k' \equiv \Re k > 0$$

$$k'' \equiv \Im k < 0$$

を使うと

$$F(z) \equiv \cos(k'z) e^{k''z} + \cos(-k'z + \psi) e^{-k''z}$$

です。右辺第1項は z 軸の正方向へ進む波に対応し、右辺第2項は z 軸の負方向へ進む波に対応する。

$$-\pi \leq \psi \leq \pi$$

です。キルヒホッフ理論を使うと、波数 k は計算できる。未知の ψ を推定したい。

$$\nabla F = \left[-\sin(k'z) + \frac{k''}{k'} \cos(k'z) \right] k' e^{k''z} + \left[\sin(-k'z + \psi) + \frac{k''}{k'} \cos(-k'z + \psi) \right] k' e^{-k''z}$$

に注意すると

$$F(0) = 1 + \cos \psi$$

$$\nabla F|_{z=0} = \left[\sin \psi + \frac{k''}{k'} (1 + \cos \psi) \right] k'$$

なので

$$\frac{\nabla F|_{z=0}}{F(0)} = \left[\frac{\sin \psi}{1 + \cos \psi} + \frac{k''}{k'} \right] k'$$

です。 $-\pi \leq \psi \leq \pi$ では、 $(\sin \psi)/(1 + \cos \psi)$ は ψ の単調増加関数です。

この左辺を評価するために、同時観測による、

$$p(\Delta) = F(\Delta) \hat{p} e^{i(\omega t + \theta)}$$

と

$$p(-\Delta) = F(-\Delta) \hat{p} e^{i(\omega t + \theta)}$$

とを使うと、2点の圧力の和

$$p(\Delta) + p(-\Delta) = [F(\Delta) + F(-\Delta)] \hat{p} e^{i(\omega t + \theta)}$$

と2点の圧力の差

$$p(\Delta) - p(-\Delta) = [F(\Delta) - F(-\Delta)] \hat{p} e^{i(\omega t + \theta)}$$

とが判る。

特に、 $k'\Delta \ll \pi$ の場合には、 Δ について1次までの近似で

$$F(\Delta) \simeq F(0) + \nabla F|_{z=0} \Delta$$

$$F(\Delta) + F(-\Delta) \simeq 2F(0)$$

$$F(\Delta) - F(-\Delta) = 2\nabla F|_{z=0} \Delta$$

なので

$$p(\Delta) + p(-\Delta) \simeq 2p(0)$$

$$p(\Delta) - p(-\Delta) = [F(\Delta) - F(-\Delta)] \hat{p} e^{i\omega t} = 2\Delta \frac{\nabla F|_{z=0}}{F(0)} p(0)$$

です。

従って、

$$\frac{p(\Delta) - p(-\Delta)}{p(\Delta) + p(-\Delta)} = \Delta \frac{\nabla F|_{z=0}}{F(0)} = \left[\frac{\sin \psi}{1 + \cos \psi} + \frac{k''}{k'} \right] k' \Delta$$

です。この右辺を測定し、キルヒホッフ理論で求めた波数を使うと、 ψ の値が決まる。

3.3.3 波動方程式と拡散方程式

一様温度 ($\nabla T_m = 0$) の管内音波の分散関係は、3.3.1 管内音波の分散で調べたように、高周波数 $\omega \tau_\alpha \gg \pi$ の場合と低周波数 $\omega \tau_\alpha \ll \pi$ の場合とでかなり異なる。この相違を別の視点で調べるために、キルヒホッフ理論の結果

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1 - \chi_\nu}{1 + (\gamma - 1)\chi_\alpha} a_S^2 \nabla^2 p = 0 \quad (3.27)$$

を再検討する。

非粘性流体 ($\text{Pr} = 0$ または $\nu = 0$) では、 $\chi_\nu = 0$ なので、(3.27) は良い近似で位相速度 a_S の波動方程式です。しかし、粘性流体では様子が変わる。

まず、高周波数 $\omega \tau_\alpha \gg \pi$ の場合に、 χ_α と χ_ν を 1 に比べて無視すると、(3.27) は位相速度 a_S の波動方程式です。(3.30) の右辺は 1 なので、音速は ω に依らず a_S に等しく、減衰はない。小さい χ_α と χ_ν を考慮しても、(3.27) は波動方程式に小さな減衰項を加えただけです。

次に、低周波数 $\omega \tau_\alpha \ll \pi$ の場合の(3.27)は、波動方程式ではなくて、拡散係数

$$D \equiv \frac{a_S^2 \tau_\nu}{4 [\gamma + i(\gamma - 1)\mathfrak{S}\chi_\alpha]}$$

の拡散方程式

$$\frac{\partial p}{\partial t} - D \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (3.37)$$

です。このことを示そう。

$\omega \tau_\alpha \ll \pi$ の場合には、 $\chi_\alpha \simeq 1 + i\mathfrak{S}\chi_\alpha$ と $\chi_\nu \simeq 1 + i\mathfrak{S}\chi_\nu$ に注意して、 $\mathfrak{S}\chi_\alpha$ と $\mathfrak{S}\chi_\nu$ について 1 次までの近似を行うと、(3.27) の近似式は

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{i\mathfrak{S}\chi_\nu}{\gamma + i(\gamma - 1)\mathfrak{S}\chi_\alpha} a_S^2 \nabla^2 p = 0$$

です。更に $\partial/\partial t = i\omega$ と $\mathfrak{S}\chi_\nu \simeq -\omega \tau_\nu/4$ に注意すると(3.37)になる。

なお、拡散方程式(3.37)を使うと、 $\omega \tau_\alpha \ll \pi$ の場合の分散関係は

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{4D}}(1-i)$$

です。 $\Im\chi_\alpha \simeq -\omega\tau_\alpha/4$ を γ に比べて無視すると

$$D \equiv \frac{a_S^2\tau_\nu}{4[\gamma + i(\gamma-1)\Im\chi_\alpha]} \simeq \frac{a_S^2\tau_\nu}{4\gamma}$$

です。これを使うと、分散関係の近似式 (3.32) が得られる。

このようにキルッフ理論の結果(3.27)は、高周波数 $\omega\tau_\alpha \gg \pi$ では波動方程式が良い近似だが、低周波数 $\omega\tau_\alpha \ll \pi$ では拡散方程式(3.37)が良い近似となる。中間の $\pi/10 < \omega\tau < 10\pi$ は波動方程式とも拡散方程式とも言えない遷移領域です。

このことは管内音波の流体物理学的理解を複雑にしている。波のイメージは波動方程式を基本とすることが多く、我々は拡散方程式を基本とする波のイメージに慣れていない。さらに、遷移領域では波のイメージを描き難い。

熱音響現象で興味深い蓄熱器の中での流体の運動を解析的に調べることは難しい。困難の理由は $\nabla T_m \neq 0$ だけではない。 $\nabla T_m = 0$ の場合ですら、波動方程式とも拡散方程式とも言えない遷移領域を含むからです。しかも、顕著な熱音響現象が生じるのは、 ∇T_m の有限な蓄熱器などが遷移領域にある場合です。

タコニス振動を研究するためにキルッフ理論を $\nabla T_m \neq 0$ に拡張したのはクラマース (1949年) です。このクラマースですら $\nabla T_m \neq 0$ の場合の議論を避けた。タコニス振動のクラマース模型では、管の温度分布は階段関数とし、閉端を伴う高温部と開端を伴う低温部にキルッフ理論を使った。 T_m の跳びで表される接続部で圧力 p と質量流量 $\rho_m A \langle u \rangle_r$ を連続として、振動の安定限界を議論した。ここで A は流路断面積です。最後に波動方程式が良い近似となる $\omega\tau_\alpha \gg \pi$ の場合を数値的に調べたクラマースは、実験結果と合わないことに気づき、線形理論ではタコニス振動を扱えないとの結論に達した。

タコニス振動についてのクラマースの1949年論文もロットの1969年論文も、部分的にキルッフ理論を使い、拡張キルッフ理論を避けた。ロットがクラマースと異なるのは、最後にデジタル電子計算機を使って任意の $\omega\tau_\alpha$ で安定限界を調べ

たので、遷移領域をも含めることが出来たことです。ロットの結論は矢崎らの実験⁵で支持された。

デジタル電子計算機が進歩した現代では、流体の振動運動を(3.8)と(3.25)に基づき数値計算で調べることは可能です。しかし、計算結果の意味を理解することは容易でない。理解することはアナログ的思考だからです。

次の章からは熱力学的議論に移る。流体の振動運動を流体物理学的に理解することを諦めて、流体の振動運動による熱力学的輸送現象の理解に向かう。

<第3章の参考書>

富永 昭 『熱音響工学の基礎』 (1998年 内田老鶴圃)

琵琶哲志 『熱音響デバイス』 (2018年 コロナ社) : 実験観測事実による裏付けが豊富

⁵ T. Yazaki, A. Tominaga and Y. Narahara: *Experiments on Thermally Driven Acoustic Oscillations of Gaseous Helium*, J. Low Temp. Phys. **41** (1/2) (1980), pp.45-60

第4章 熱音響理論：粗視的階層

熱音響現象の粗視的階層では、第2章で述べた周期的定常状態を議論するために、微視的階層の変数で構成された量の時間平均を使う。時間平均温度 T_m と仕事流密度

$$\tilde{I} \equiv \langle p \cdot u \rangle_t$$

やエントロピー流密度

$$\tilde{S} \equiv \rho_m \langle S \cdot u \rangle_t - \frac{\kappa}{T_m} \nabla T_m$$

などがその例です。ここで記号 $\langle \dots \rangle_t$ は時間平均を表す。音響学では仕事流密度を音の強度 (intensity) と呼ぶ。記号 \tilde{I} はintensityの頭文字に因む。なお、電場 E と磁場 H の横波である電磁波が運ぶ電磁エネルギー流密度はポインティングベクトル $E \times H$ の時間平均 $\langle E \times H \rangle_t$ です。

エントロピー流密度 \tilde{S} の右辺第2項 $-(\kappa/T_m) \nabla T_m$ は単純熱伝導に伴うエントロピー流密度です。第1項 $\rho_m \langle S \cdot u \rangle_t$ は流体の振動運動に伴うエントロピー流密度です。

時間平均することは粗視化の一つです。時間平均することで、時間変化は議論の対象外となり、議論の重点は空間変化に移る。温度勾配 ∇T_m 、仕事源 $W \equiv \nabla \tilde{I}$ 、エントロピー生成 $\sigma = \nabla \tilde{S}$ などが空間変化の例です。

流路断面内平均することも粗視化の一つです。流路断面内平均することで、流路断面内での空間変化は議論の対象外となり、議論の重点は軸方向の1次元空間変化に移る。

この2段階の粗視化により、周期的定常状態は定常状態になり、空間変化は軸方向のみの1次元変化だけになる。

キルヒホッフ理論でも拡張キルヒホッフ理論でも時間平均温度 T_m と時間平均密度 ρ_m と振動圧力 p とは流路断面内で一様です。

振動圧力 p が流路断面内で一様なので、

$$\langle \langle p \cdot u \rangle_t \rangle_r = \langle p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t$$

です。ここで記号 $\langle \dots \rangle_r$ は流路断面内での空間平均を表す。以下では、これを仕事流密度と呼び、再定義した仕事流密度の数式表現は

$$\tilde{I} \equiv \langle \langle p \cdot u \rangle_t \rangle_r = \langle p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t$$

とする。

p の複素共役 p^\dagger を使うと、

$$\langle p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t = \frac{1}{2} \Re [p^\dagger \langle u \rangle_r] = \frac{1}{2} \Re \left[\hat{p} \exp(-i(\omega t + \theta)) \langle \hat{u} \rangle_r \exp i \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

なので、仕事流密度は

$$\tilde{I} \equiv \langle p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t = \Re \exp i \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cdot \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r = \sin \theta \cdot \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.1)$$

です。 \Re は実部を表す。

複素表示を使うことで積の時間平均がこのように簡単に計算できることは複素表示の利点です。

仕事流密度 \tilde{I} は $\sin \theta$ に比例していて、 \tilde{I} の向きは $\sin \theta$ の符号と一致する。 $\theta = 0$ の場合には $\tilde{I} = 0$ となり、純粋な定在波です。純粋な進行波では $\theta = \pm \pi/2$ です。圧力 p は、定在波では変位 $\langle \xi \rangle_r$ と同位相ですが、進行波では流速 $\langle u \rangle_r$ と同位相です。

複素数は実数軸と虚数軸の張る複素数平面（すなわちガウス平面）上のベクトルで表現できます。 $\langle \xi \rangle_r$ が実数軸上にある場合には $\langle u \rangle_r = i\omega \langle \xi \rangle_r$ は虚数軸上にあります。この時、 $p \propto \langle \xi \rangle_r e^{i\theta}$ の実部は $\langle \xi \rangle_r \cos \theta$ に比例し、虚部は $\langle \xi \rangle_r \sin \theta$ に比例する。従って、 p の定在波成分は $\cos \theta$ に比例し、 p の進行波成分は $\sin \theta$ に比例する。

流路断面内で時間平均温度 T_m が一樣であることを考慮すると、熱伝導によるエントロピー流密度

$$\tilde{S}_\kappa \equiv -\frac{\kappa}{T_m} \nabla T_m \leq 0$$

は流路断面内で空間平均しても数式表現が変わらない：

$$\langle \tilde{S}_\kappa \rangle_r = \tilde{S}_\kappa \equiv -\frac{\kappa}{T_m} \nabla T_m \leq 0$$

流体の振動運動に伴うエントロピー流密度 $\rho_m \langle S \cdot u \rangle_t$ の流路断面内平均 $\rho_m \langle \langle S \cdot u \rangle_t \rangle_r$ との和を、エントロピー流密度 \tilde{S} と定義する。再定義したエントロピー流密度の数式表現は

$$\tilde{S} \equiv \rho_m \langle \langle S \cdot u \rangle_t \rangle_r + \tilde{S}_\kappa$$

です。流体の振動運動によるエントロピー流密度 $\rho_m \langle \langle S \cdot u \rangle_t \rangle_r$ の具体的表現については4.2 エントロピー流密度で議論する。

エネルギー流密度についても流路断面内で空間平均する。数式表現は

$$\tilde{E} \equiv \tilde{I} + \tilde{S}$$

のままです。

4.1 仕事源

仕事流密度 $\tilde{I} \equiv \langle p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t$ の湧き出し

$$W \equiv \nabla \tilde{I} = \langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t + \langle \nabla p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t$$

を仕事源と呼ぶ。仕事流密度 \tilde{I} の増幅器や原動機では $W > 0$ ですが、それ以外では $W \leq 0$ です (1.4 定常状態の分類)。さらに、原動機の図1.1を思い出すと、 W は \tilde{I} の傾きです。仕事源の右辺第2項は単位体積当たりの運動エネルギー $(1/2)\rho_m \langle \hat{u} \rangle_r^2$ の粘性による散逸の流路断面平均

$$\langle \nabla p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t = -\mathfrak{S} \left(\frac{1}{1 - \chi_v^\dagger} \right) \omega \frac{1}{2} \rho_m \langle \hat{u} \rangle_r^2 \leq 0 \quad (3.9)$$

なので、負または零であり、右辺第1項

$$\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t = \frac{\beta T_m}{C_p} \left\langle p \cdot \frac{d\langle S \rangle_r}{dt} \right\rangle_t \quad (3.13)$$

は熱から仕事へのエネルギー変換密度の流路断面内平均です。

熱から仕事へのエネルギー変換密度の流路断面内平均(3.13)は

$$\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t = -(\gamma - 1)K_S \langle p \cdot i\omega \chi_\alpha p \rangle_t + \beta \nabla T_m \langle p \cdot \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \rangle_t \quad (4.2)$$

です。なぜなら、

$$\frac{d\langle S \rangle_r}{dt} = -\chi_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial t} + \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m \quad (3.23)$$

に p を乗じてから時間平均すると

$$\left\langle p \cdot \frac{d\langle S \rangle_r}{dt} \right\rangle_t = -\frac{\beta}{\rho_m} \langle p \cdot i\omega \chi_\alpha p \rangle_t + \frac{C_p}{T_m} \nabla T_m \langle p \cdot \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \rangle_t$$

なので、(3.13)の右辺は

$$\frac{\beta T_m}{C_p} \left\langle p \cdot \frac{d\langle S \rangle_r}{dt} \right\rangle_t = -(\gamma - 1)K_S \langle p \cdot i\omega \chi_\alpha p \rangle_t + \beta \nabla T_m \langle p \cdot \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \rangle_t$$

となるからです。

(4.2)の右辺第一項

$$-(\gamma - 1)K_S \langle p \cdot i\omega \chi_\alpha p \rangle_t = -\mathfrak{S} \chi_\alpha^\dagger \frac{1}{2} (\gamma - 1)K_S \hat{p}^2 \leq 0$$

は負または零です。

(4.2)の右辺第二項は

$$\beta \nabla T_m \langle p \cdot \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \rangle_t = |\langle h \rangle_r| \sin(\theta - \arg \langle h \rangle_r) \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

です。なぜなら

$$\begin{aligned} \langle p \cdot \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \rangle_t &= (\Re \langle h \rangle_r \sin \theta - \Im \langle h \rangle_r \cos \theta) \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \\ \Re \langle h \rangle_r \sin \theta - \Im \langle h \rangle_r \cos \theta &= |\langle h \rangle_r| \sin(\theta - \arg \langle h \rangle_r) \end{aligned}$$

だからです。

(4.2)の右辺第二項が $\beta \nabla T_m$ に比例していることに注意すると、仕事源は

$$W = W_\theta + W_A$$

ただし

$$W_A \equiv - \left(\Im \chi_\alpha^\dagger \frac{1}{2} (\gamma - 1) K_S \hat{p}^2 + \Im \left(\frac{1}{1 - \chi_\nu^\dagger} \right) \frac{1}{2} \rho_m \langle \hat{u} \rangle_r^2 \right) \omega \leq 0 \quad (4.3)$$

$$W_\theta \equiv w_\theta \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.4)$$

$$w_\theta \equiv |\langle h \rangle_r| \sin(\theta - \arg \langle h \rangle_r) = \Re \langle h \rangle_r \sin \theta - \Im \langle h \rangle_r \cos \theta \quad (4.5)$$

です。 W_A の第2項は $\langle \nabla p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t$ です。は W_A の第1項と W_θ との和は $\langle p \cdot \nabla \langle u \rangle_r \rangle_t$ です。

$$\begin{aligned} \chi_\alpha &\equiv \langle f_\alpha \rangle_r = \frac{2 J_1(\lambda_\alpha)}{\lambda_\alpha J_0(\lambda_\alpha)} \\ \langle h \rangle_r &= \frac{\chi_\alpha - \chi_\nu}{(1 - \text{Pr})(1 - \chi_\nu)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

と図3.4をを思い出そう。

振動運動している流体を調和振動子とみなすと W_A の意味が判る。振動子のエネルギー密度は運動エネルギー密度 $(1/2)\rho_m \langle \hat{u} \rangle_r^2$ と位置エネルギー密度 $(1/2)(\gamma - 1)K_S \hat{p}^2$ との和です。 W_A は $(1/2)\rho_m \langle \hat{u} \rangle_r^2$ の粘性散逸と $(1/2)(\gamma - 1)K_S \hat{p}^2$ の熱拡散による散逸との和です。 $(1/2)\rho_m \langle \hat{u} \rangle_r^2$ の粘性散逸は W_A の第2項です。 W_A の第2項は管内音波の分散に初めて粘性の効果を導入したヘルムホルツの功績です。位置エネルギー密度 $(1/2)(\gamma - 1)K_S \hat{p}^2$ の熱拡散による散逸は W_A の第1項です。 W_A の第1項は管内音波の分散に初めて熱伝導の効果を導入したキルヒホッフの功績です。

$W_A < 0$ は温度勾配 ∇T_m や(圧力と変位の)位相差 θ に依存せず、一様温度($\nabla T_m = 0$)での音波の減衰(attenuation)に対応する。この意味で χ_ν や χ_α の虚部は一様温度での不可逆過程の程度を表す。なお、添字Aはattenuationの頭文字に因む。

仮に $w_A = 0$ の場合には図1.1aは図4.1の破線のように変わる。 $w_A < 0$ は熱機関にとっては無駄なエネルギー変換密度です。仕事流密度 \tilde{I} の傾きが大きくなると、エネルギー保存則により、熱流密度束 \tilde{Q} の傾きも大きくなり、無駄なエネルギー流密度 $\tilde{E} \leq 0$ が増加する。同じことだが、無駄なエネルギー流密度 $\tilde{E} \leq 0$ の一部分は、仕事流密度の蓄熱器内での全散逸

$$\int w_A dz \leq 0$$

と関わりがある。散逸した仕事流密度は熱流密度に変換され無駄なエネルギー流密度 $\tilde{E} \leq 0$ に加わる。

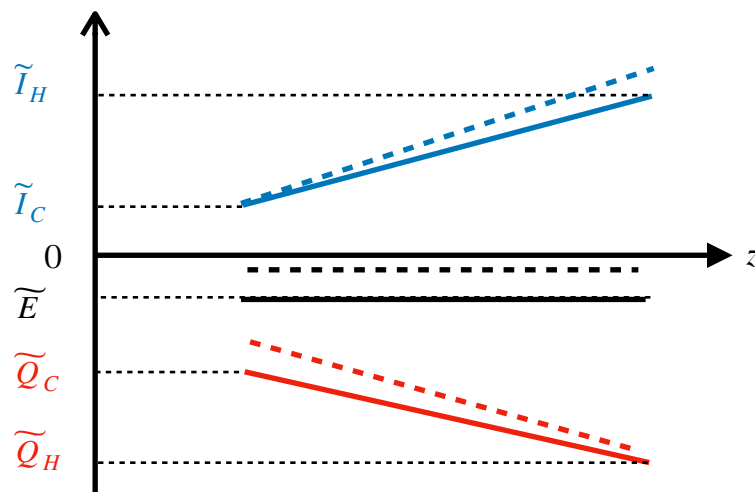


図4.1 原動機の場合の熱流密度 \tilde{Q} と仕事流密度 \tilde{I} とエネルギー流密度 \tilde{E} の軸方向分布例：横軸は位置座標。破線は $\tilde{E} = 0$ の場合の熱流。破線は $w_A = 0$ の場合。

w_θ は $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ と $\beta \nabla T_m$ とに比例している。 w_θ が $\beta \nabla T_m$ に比例することは熱音響熱機関や仕事流密度の増幅器にとって重要です。音は流体の振動運動であるとの認識は17世紀のニュートンに始まるが、20世紀前半まで $\nabla T_m = 0$ の場合に制限されていた。管内音波の流体物理学的議論を $\nabla T_m \neq 0$ に拡張したのはタコニス振動を研究対象としたクラマース（1949年）です。この意味で w_θ はクラマースの功績です。

(4.4)と(4.5)に注意して

$$(\Re\langle h\rangle_r \sin \theta) \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$$

と

$$(-\Im\langle h \rangle_r \cos \theta) \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r = (\Im\langle h^\dagger \rangle_r \cos \theta) \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

を、それぞれ、 W_θ の進行波成分と定在波成分と呼ぶことがある。

W_θ と $-W_A$ との大小関係により、原動機や仕事流密度の増幅器 ($W > 0$) とそれ以外 ($W \leq 0$) の区別ができる。 $-W_A < W_\theta$ では原動機あるいは仕事流密度の増幅器ですが、逆に、 $W_\theta \leq -W_A$ ではそれ以外です。

複雑そうに見える仕事源 $W = W_\theta + W_A$ の数式表現を見易くしたい。

$\theta_W \equiv \arg\langle h \rangle_r < 0$ を導入すると、

$$w_\theta \equiv |\langle h \rangle_r| \sin(\theta - \theta_W)$$

です。

w_θ の位相差依存性を図4.2に模式的に示す。 $W_\theta > 0$ の必要条件の一つ $w_\theta > 0$ は

$$\theta_W < \theta < \pi + \theta_W$$

です。 w_θ が最大になるのは

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \theta_W$$

の場合です。図3.4から判るように、 $\omega\tau_\alpha \sim \pi$ では $\theta_W \sim -\pi/4$ です。従って、 $\omega\tau_\alpha \sim \pi$ では、 $\theta = \pi/4$ の場合に w_θ が最大になる。

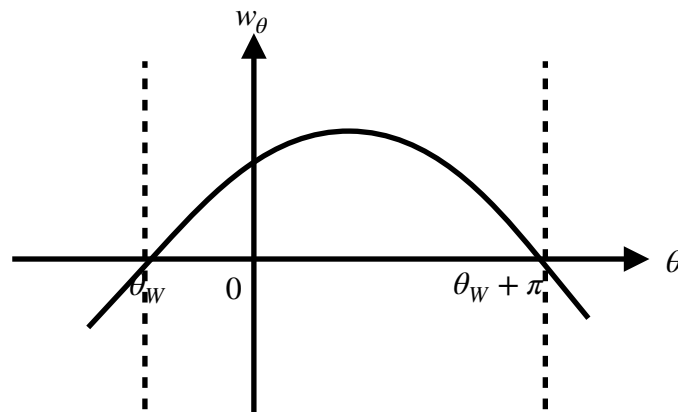


図4.2 w_θ の位相差 θ 依存性： $\theta_W < \theta < \theta_W + \pi/2$ の領域のみ原動機 $w_\theta > 0$ が可能。 $\theta = \pi/2 + \theta_W$ で w_θ が最大となる。
 $\theta_W \equiv \arg\langle h \rangle_r < 0$ 。

次に音響インピーダンス

$$Z \equiv \frac{\hat{p}}{\langle \hat{u} \rangle_r} > 0$$

を導入し、長さの次元を持ち角周波数 ω に反比例する正の量 ℓ_A を

$$\frac{1}{\ell_A} \equiv \left(\Im \chi_\alpha^\dagger (\gamma - 1) K_S Z + \Im \left(\frac{1}{1 - \chi_\nu^\dagger} \right) \frac{\rho_m}{Z} \right) \omega > 0 \quad (4.5)$$

となるように導入すると、 W_A の数式表現(4.3)が短くなる：

$$W_A = -\frac{1}{\ell_A} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.6)$$

ℓ_A は一様温度 ($\nabla T_m = 0$) での進行音波の減衰長に相当する。

$-W_A > 0$ を小さくする方法を議論する。

2つの正の量の相加平均と相乗平均の関係

$$\frac{1}{2} \left(\Im \chi_\alpha^\dagger (\gamma - 1) K_S Z + \Im \left(\frac{1}{1 - \chi_\nu^\dagger} \right) \frac{\rho_m}{Z} \right) \geq \sqrt{\Im \chi_\alpha^\dagger (\gamma - 1) K_S Z \times \Im \left(\frac{1}{1 - \chi_\nu^\dagger} \right) \frac{\rho_m}{Z}}$$

を使うと(4.5)から

$$\frac{1}{\ell_A} \geq 2 \sqrt{(\gamma - 1) \Im \chi_\alpha^\dagger \cdot \Im \left(\frac{1}{1 - \chi_\nu^\dagger} \right)} \cdot \frac{\omega}{a_S}$$

で、 $-W_A > 0$ を小さくするには、音速

$$a_S \equiv \sqrt{\frac{1}{\rho_m K_S}}$$

の大きい水素やヘリウムの気体を動作気体とするだけでなく、低い角周波数 ω を選ぶこととインピーダンス Z の適切な選択が有効です。等号が成り立つのは

$$\Im \chi_\alpha^\dagger (\gamma - 1) K_S Z = \Im \left(\frac{1}{1 - \chi_\nu^\dagger} \right) \frac{\rho_m}{Z}$$

すなわち

$$Z = \sqrt{\frac{\Im \left(\frac{1}{1 - \chi_\nu^\dagger} \right)}{\Im \chi_\alpha^\dagger} \cdot \frac{\rho_m}{(\gamma - 1) K_S}} = \sqrt{\frac{\Im \left(\frac{1}{1 - \chi_\nu^\dagger} \right)}{\Im \chi_\alpha^\dagger} \cdot \frac{1}{\gamma - 1} \rho_m a_S}$$

の場合です。

4.1.1 仕事源に特徴的な温度勾配

仕事源に特徴的な温度勾配

$$\Theta_W \equiv \frac{-W_A}{w_\theta \beta \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r} = \frac{1}{w_\theta \beta \ell_A} \quad (4.7)$$

を導入する。 Θ_W は、 w_θ に反比例し、 w_θ と同符号で、振幅に依存しない。 $w_\theta \beta > 0$ の場合には $\Theta_W \geq 0$ です。以下では、気体を想定して $\beta > 0$ とする。

Θ_W と W との関係は

$$W \equiv w_\theta \beta (\nabla T_m - \Theta_W) \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

です。 Θ_W と w_θ が同符号であることを考慮すると、 $W > 0$ となるための必要条件は

$$\nabla T_m > \Theta_W$$

です。 $w_\theta > 0$ の場合の Θ_W は原動機や仕事流増幅器の温度勾配の下限を意味する。 Θ_W を小さくするには W_A に関わる長さ ℓ_A を長くするのが効果的です。

Θ_W は ℓ_A に反比例している。 Θ_W は振動モード（角周波数 ω 、インピーダンス Z 、位相角 θ と $\omega \tau_\alpha$ の総称）で決まります。

$\omega \tau_\alpha \rightarrow 0$ の極限では $\theta_W \rightarrow 0$ なので温度勾配の下限 Θ_W が最小となるのは $\theta \rightarrow \pi/2$ すなわち純粋な進行波の場合です。

しかし、 $\omega \tau_\alpha \simeq \pi$ すなわち $\theta_W = -\pi/4$ であるような原動機では、温度勾配の下限 Θ_W が最小となるのは $\theta = \pi/4$ の場合です。 Θ_W を小さくするには、定在波成分を考慮する必要がある。

このように仕事源だけでも原動機の理解と設計に役立つ。

$\nabla T_m = 0$ の場合の管内音波の分散を議論したのは19世紀中頃のヘルムホルツとキルヒホッフです。管内音波の分散を議論する際に、初めて粘性を考慮したのはヘルムホルツです。ヘルムホルツ理論では、 $\chi_\alpha = 0$ で、 χ_ν だけが有限です。粘性とともに径方向熱伝導も考慮し、エネルギー保存則を初めて使ったのはキルヒホッフです。キルヒホッフ理論では χ_ν だけでなく χ_α も有限です。

キルヒホッフ理論（1868年）を拡張して ∇T_m も有限としたのが、20世紀のクラマースです。クラマースのお陰で熱音響熱機関の熱力学的議論が可能となりました。クラマースの拡張キルヒホッフ理論（1949年）では(3.26)の右辺第2項が有限です。キルヒホッフ理論（1868年）から拡張キルヒホッフ理論（1949年）まで81年経過しました。

4.2 エントロピー流密度

流体の振動運動に伴うエントロピー流密度は

$$\rho_m \langle \langle S \cdot u \rangle_t \rangle_r = -\beta \langle \langle f_\alpha p \cdot u \rangle_t \rangle_r + \frac{\rho_m C_p}{T_m} \nabla T_m \langle \langle h \langle \xi \rangle_r \cdot u \rangle_t \rangle_r$$

です。これは

$$S = -f_\alpha \frac{\beta}{\rho_m} p + h \frac{C_p}{T_m} \langle \xi \rangle_r \nabla T_m \quad (3.24)$$

から明かです。

したがって、エントロピー流密度は3項の和

$$\tilde{S} = \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa$$

ただし

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\theta &\equiv -\beta \langle \langle f_\alpha p \cdot u \rangle_t \rangle_r \\ \tilde{S}_D &\equiv \frac{\rho_m C_p}{T_m} \nabla T_m \langle \langle h \langle \xi \rangle_r \cdot u \rangle_t \rangle_r \end{aligned}$$

です。

温度勾配 ∇T_m に比例する

$$\tilde{S}_D \equiv \frac{\rho_m C_p}{T_m} \nabla T_m \langle \langle h \langle \xi \rangle_r \cdot u \rangle_t \rangle_r = -\mathfrak{F} \langle g_D^\dagger \rangle_r \frac{\rho_m C_p}{T_m} \nabla T_m \frac{1}{2} \langle \hat{\xi} \rangle_r \langle \hat{u} \rangle_r \leq 0$$

はドリムパイプで重要です。添字Dはdreamの頭文字に因む。ここで

$$g_D^\dagger \equiv h^\dagger \frac{1-f_\nu}{1-\chi_\nu} = \frac{f_\alpha^\dagger - f_\nu^\dagger}{(1-\text{Pr})(1-\chi_\nu^\dagger)} \cdot \frac{1-f_\nu}{1-\chi_\nu} = \frac{f_\alpha^\dagger - f_\nu^\dagger - f_\alpha^\dagger f_\nu + f_\nu^\dagger f_\nu}{(1-\text{Pr})|1-\chi_\nu|^2}$$

の流路断面内平均は

$$\mathfrak{F} \langle g_D^\dagger \rangle_r = \frac{\mathfrak{F} \chi_\alpha^\dagger - \text{Pr} \mathfrak{F} \chi_\nu^\dagger}{(1-\text{Pr}^2) |1-\chi_\nu|^2} > 0 \quad (4.8)$$

です。なぜなら、ベッセル関数の積分公式を使うと

$$\langle f_\alpha^\dagger f_\nu \rangle_r = \frac{\text{Pr} \chi_\alpha^\dagger + \chi_\nu}{1+\text{Pr}} \quad (4.9)$$

であり、(4.9)を使うと

$$\langle f_\nu^\dagger f_\nu \rangle_r = \Re \chi_\nu$$

だからです。(4.9)については付録：第一種ベッセル関数 J_n とその管内音波への応用を参照して欲しい。

非粘性 ($\text{Pr} = 0, \chi_\nu = 0$) の場合には $\mathfrak{F} \langle g_D^\dagger \rangle_r = \mathfrak{F} \chi_\alpha^\dagger$ です。

実在気体に対応してプラントル数 Pr の値が $2/3$ の場合に、 $\mathfrak{F} \langle g_D^\dagger \rangle_r$ の $\omega \tau_\alpha$ 依存性を、図4.3に示す。

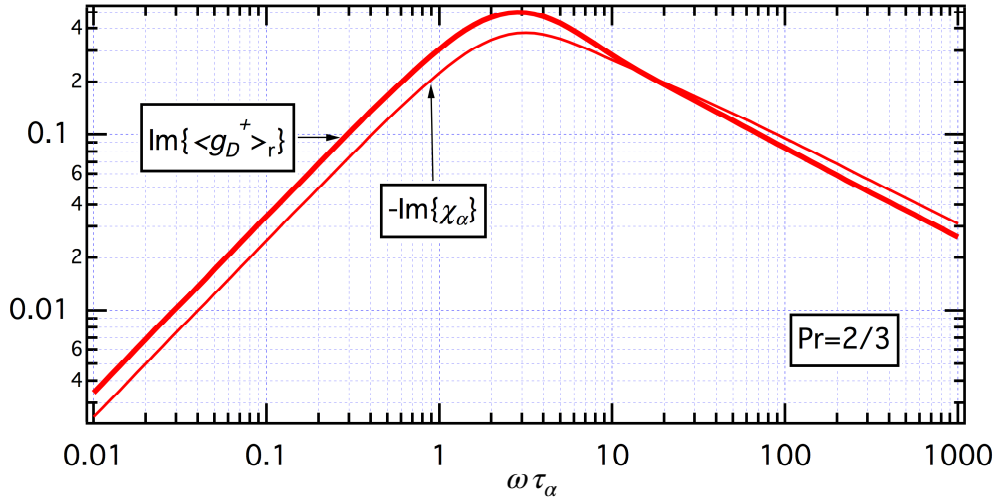


図4.3 Pr = 2/3の場合の $\Im\langle g_D^\dagger \rangle_r$ の $\omega\tau_\alpha$ 依存性：比較のために $\Im\chi_\alpha$ も示しました。 $\omega\tau_\alpha \ll \pi$ では、 $\Im\langle g_D^\dagger \rangle_r / \Im\chi_\alpha^\dagger \approx 11/8 \approx 1.4$ です。これは両対数グラフです。

$\tilde{S}_D \leq 0$ は温度勾配 ∇T_m に比例し、高温側から低温側へ向かうエントロピー流密度です。このために $T_m \tilde{S}_D \leq 0$ もエネルギー流 $\tilde{E} \leq 0$ と関わりがある。

位相差に関わる \tilde{S}_θ はヒートポンプの可能性に関わるエントロピー流密度で熱膨張率 β に比例している。

$$\tilde{S}_\theta \equiv -\beta \langle \langle f_\alpha p \cdot u \rangle_i \rangle_r = s_\theta \beta \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.10)$$

ここで

$$s_\theta \equiv -|\langle g^\dagger \rangle_r| \sin(\theta - \arg \langle g^\dagger \rangle_r) = -\Re \langle g^\dagger \rangle_r \sin \theta + \Im \langle g^\dagger \rangle_r \cos \theta \quad (4.11)$$

の右辺の

$$g^\dagger \equiv f_\alpha^\dagger \frac{1 - f_\nu}{1 - \chi_\alpha} = \frac{f_\alpha^\dagger - f_\alpha^\dagger f_\nu}{1 - \chi_\nu}$$

の流路断面内平均は

$$\langle g^\dagger \rangle_r = \frac{\chi_\alpha^\dagger - \chi_\nu}{(1 + \text{Pr})(1 - \chi_\nu)} \quad (4.12)$$

です。ここでも

$$\langle f_\alpha^\dagger f_\nu \rangle_r = \frac{\text{Pr} \chi_\alpha^\dagger + \chi_\nu}{1 + \text{Pr}} \quad (4.9)$$

を使った。非粘性 (Pr = 0, $\chi_\nu = 0$) の場合には $\langle g^\dagger \rangle_r = \chi_\alpha^\dagger$ となることは明かです。

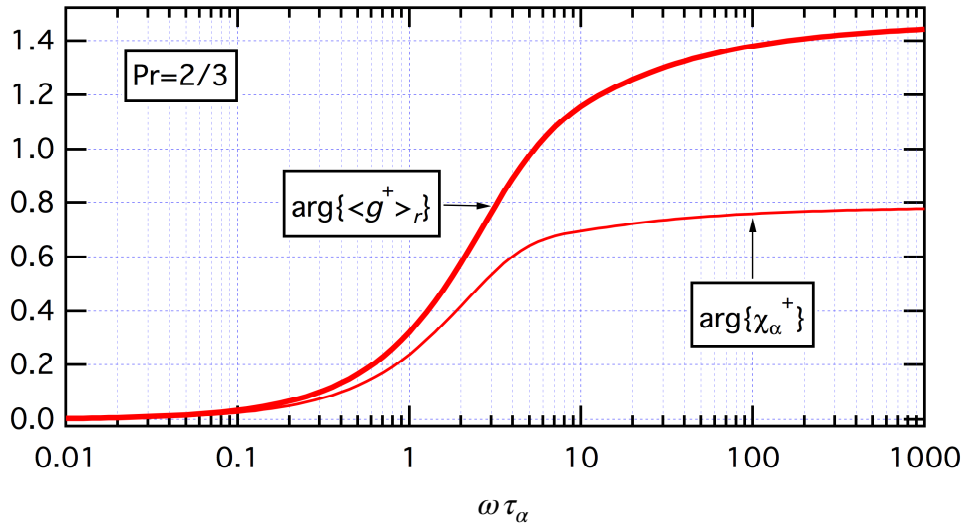
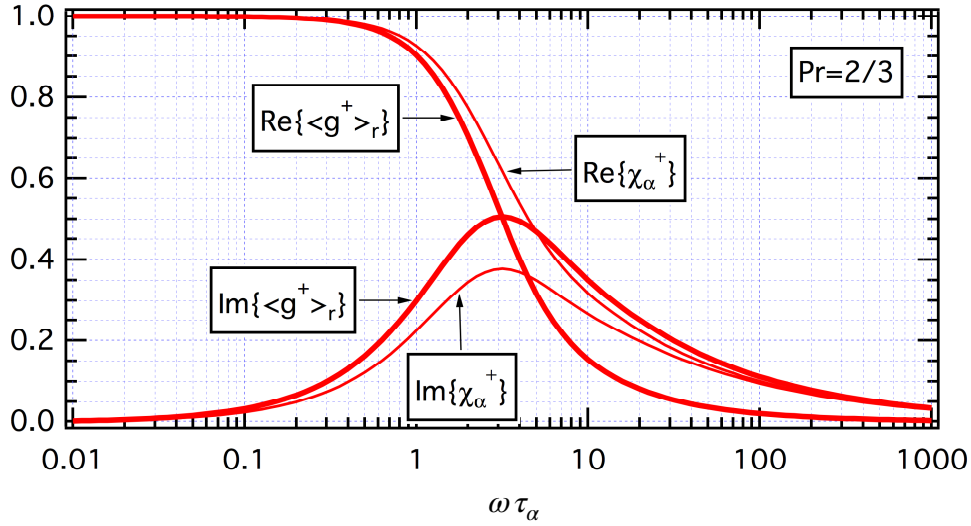


図4.4 $Pr=2/3$ の場合の $\langle g^+ \rangle_r$ の $\omega\tau_\alpha$ 依存性：比較のために χ_α^+ も図示した。 $\Re\{\langle g^+ \rangle_r\} < \Re\{\chi_\alpha^+\}$ ですが、 $\Im\{\langle g^+ \rangle_r\} > \Im\{\chi_\alpha^+\}$ です。また、 $0 < arg\{\chi_\alpha^+\} < \pi/4$ ですが、 $0 < arg\{\langle g^+ \rangle_r\} < \pi/2$ です。 $\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ で $arg\{\langle g^+ \rangle_r\} \simeq \pi/4$ です。

実在気体に対応してプラントル数 Pr の値が $2/3$ の場合に、 $\langle g^+ \rangle_r$ の $\omega\tau_\alpha$ 依存性を図4.4に示す。 $\theta_s \equiv arg\{\langle g^+ \rangle_r\} > 0$ は $\omega\tau_\alpha$ の増加関数で

$$0 < \theta_s < \frac{\pi}{2}$$

です。特に、 $\omega\tau_\alpha \sim \pi$ で $\theta_s \sim \pi/4$ です。

$\tilde{S}_\theta > 0$ となるのは、(4.10)と(4.11)によれば、

$$-\pi + \theta_s < \theta < \theta_s \tag{4.13}$$

の場合だけです。(4.13)はヒートポンプの必要条件の一つです。

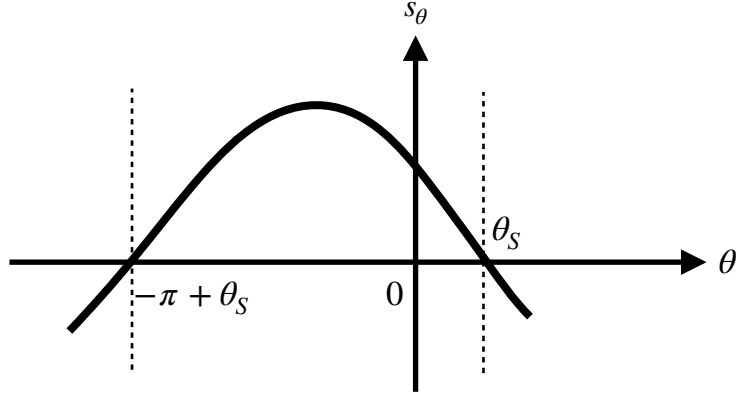


図4.5 s_θ の位相差 θ 依存性： $-\pi + \theta_S < \theta < \theta_S$ の領域のみヒートポンプとなることが可能。 $\theta = -\pi/2 + \theta_S$ の場合に s_θ が最大になる。 n を整数として、 $\theta = \theta_S \pm n\pi$ の場合に、 $s_\theta = 0$ となる。
 $\theta_S \equiv \arg\langle h^\dagger \rangle_r > 0$

(4.10)と(4.11)に注意して

$$-(\Re\langle g^\dagger \rangle_r \sin \theta) \beta \frac{1}{2} \hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$$

と

$$(\Im\langle g^\dagger \rangle_r \cos \theta) \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$$

を、それぞれ、 \tilde{S}_θ の進行波成分と定在波成分と呼ぶことがある。

$s_\theta \equiv -|\langle g^\dagger \rangle_r| \sin(\theta - \arg\langle g^\dagger \rangle_r)$ の位相差 θ 依存性を図4.5に模式的に図示した。。
 $\theta_S \equiv \arg\langle h^\dagger \rangle_r$ を使うと、 $\theta = \theta_S$ では、 $s_\theta = 0$ です。 s_θ が最大になるのは

$$\theta = \frac{-\pi}{2} + \theta_S < 0$$

の場合です。 $\omega\tau_\alpha \sim \pi$ の場合には $\theta_S \sim \pi/4$ の場合です。

複雑そうに見える \tilde{S}_D の数式表現を見やすくする。

熱伝導度の次元を持つ

$$\kappa_D \equiv \Im\langle g_D^\dagger \rangle_r \rho_m C_p \frac{1}{2} \langle \hat{\xi} \rangle_r \langle \hat{u} \rangle_r = \frac{\Im\langle g_D^\dagger \rangle_r}{\omega} \frac{\rho_m C_p}{Z} \frac{1}{2} \hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r > 0 \quad (4.14)$$

を導入すると、 \tilde{S}_D の数式表現が簡単になる：

$$\tilde{S}_D = -\frac{\kappa_D}{T_m} \nabla T_m \leq 0$$

\tilde{S}_D は、 θ に依らないが、 κ_D を通して $\omega\tau_\alpha$ と $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ に依存する。 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ が同じなら、 κ_D はインピーダンス Z に反比例する。 $\omega\tau_\alpha \ll \pi$ では $\Im\langle g_D^\dagger \rangle_r / \omega$ は τ_α に比例する定数です。

更に、温度勾配の次元を持つ記号

$$\Theta_D \equiv \frac{\omega}{\Im\langle g_D^\dagger \rangle_r} \cdot \frac{Z}{\rho_m C_p} > 0 \quad (4.15)$$

を導入すると、複雑そうに見える(4.14)は

$$\kappa_D = \frac{1}{\Theta_D} \frac{1}{2} \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r \quad (4.16)$$

となり、

$$\tilde{S}_D = -\frac{\nabla T_m}{\Theta_D} \frac{1}{T_m} \frac{1}{2} \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r \leq 0$$

です。

ヒートポンプ ($\tilde{S} > 0$) とヒートポンプ以外 ($\tilde{S} \leq 0$) との区別は \tilde{S}_θ と

$$-(\tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa) = (\kappa_D + \kappa) \frac{\nabla T_m}{T_m} \geq 0$$

との大小関係で決まる。ヒートポンプ ($\tilde{S} > 0$) では

$$\tilde{S}_\theta \geq -(\tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa)$$

ですが、ヒートポンプ以外 ($\tilde{S} \leq 0$) では

$$\tilde{S}_\theta \leq -(\tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa)$$

です。

流体の振動運動がエントロピー流密度と結びつけられたことは熱音響現象の熱力学的理解の夜明けだった。強制振動の実験を行ったメルクリらは、その実験結果を理解するために、1975年論文で \tilde{S}_θ の定在波成分 ($\theta \simeq 0$ の場合) を導入した。その後ロットが \tilde{S}_D を導入し、ロスアラモスでの共鳴管冷凍機の理解と開発に役立った。

\tilde{S}_D と定在波モードの \tilde{S}_θ の導入により、共鳴管冷凍機とベーシック型パルス管冷凍機は理解できたが、定在波成分 ($\theta \simeq 0$) に拘っていると、スターリング冷凍機、GM冷凍機、オリフィス型パルス管冷凍機を理解するには無理がある。冷凍能力が予想以上に大きいためです。定在波成分 ($\theta \simeq 0$) という制限を取り除くことで、1990年頃から、スターリング冷凍機、GM冷凍機、パルス管冷凍機の理解と開発が進ん

だ。定在波成分 ($\theta \simeq 0$) という制限を取り除くことは流体の振動モードが定在波と進行波の重ね合わせであることを意味する。

4.2.1 エントロピー流密度に特徴的な温度勾配

エントロピー流密度に特徴的な温度勾配

$$\Theta_S \equiv \frac{T_m}{\kappa_D + \kappa} \tilde{S}_\theta = s_\theta \frac{\beta T_m}{\kappa_D + \kappa} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

を導入する。 $\Theta_S \geq 0$ となるのは、 $\tilde{S}_\theta \geq 0$ すなわち $s_\theta \geq 0$ の場合だけです。

Θ_S は、小振幅 ($\kappa_D \ll \kappa$) で $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ に比例するが、大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) では $\hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$ にあまり依存しない。 Θ_S はインピーダンス Z の増加関数です。 κ_D が Z に反比例するからです。

ヒートポンプ ($\tilde{S} \nabla T_m > 0$) の $\Theta_S > 0$ はヒートポンプで得られる温度勾配の上限です。 Θ_S を使うと

$$\tilde{S} = \frac{\kappa_D + \kappa}{T_m} (\Theta_S - \nabla T_m)$$

なので、ヒートポンプ ($\tilde{S} > 0$) のためには

$$\nabla T_m < \Theta_S$$

が必要だからです。逆に、ヒートポンプ以外 ($\tilde{S} \nabla T_m < 0$) では

$$\Theta_S < \nabla T_m$$

です。

このようにエントロピー流だけでもヒートポンプの理解と設計に役立ちます。

最後に、熱音響熱機関の最適位相差を議論する。図4.2から判るように、原動機の最適位相差は $\theta_W + \pi/2$ でした。 Θ_W が最小になり、 $W > 0$ が最大になるからです。図4.5から判るようにヒートポンプの最適位相差は $\theta_S - \pi/2$ です。 $\Theta_S > 0$ と $\tilde{S}_\theta > 0$ が最大になるからです。

興味深いのは $\omega \tau_\alpha \simeq \pi$ の場合です。この場合には、 $\theta_S \simeq -\theta_W = \pi/4$ なので、ヒートポンプの最適位相差は $-\pi/4$ で、原動機の最適位相差は $\pi/4$ です。ヒートポンプの最適位相差 $-\pi/4$ では $W < 0$ ですが、原動機の最適位相差では $\tilde{S}_\theta = 0$ です。

このことについては第5章エントロピー生成とエントロピー生成最小の法則で重要
です。

4.2.2 ドリームパイプの必要条件

ドリームパイプは熱機関ではないので、

$$\tilde{S} \leq 0 \wedge W \leq 0$$

が必要です。この必要条件を調べる。

\tilde{S}_θ と W_θ とはいずれも熱膨張率 β に比例しているのので、液体のように β が小さい流体
が作動流体の場合にはドリームパイプとしての機能を果たします。特に $\beta \sim 0$ では、
 $\tilde{S}_\theta \sim 0 \wedge W_\theta \sim 0$ なので、ドリームパイプの必要条件は自動的に満足されます。

熱膨張率 β が正の場合を調べましょう。 $\theta_W < \theta < \theta_S$ の場合には、 $\tilde{S}_\theta > 0 \wedge W_\theta > 0$ な
ので、ドリームパイプの必要条件は

$$\Theta_S < \nabla T_m < \Theta_W$$

です。 $-\pi + \theta_S < \theta < \theta_W$ では、 $\tilde{S}_\theta > 0 \wedge W_\theta < 0$ なので、ドリームパイプの必要条件は

$$\nabla T_m < \Theta_S$$

だけです。 $\theta_S < \theta < \pi + \theta_W$ では、 $\tilde{S}_\theta < 0 \wedge W_\theta > 0$ なので、ドリームパイプの必要条件
は

$$\nabla T_m < \Theta_W$$

だけです。

4.3 エントロピー流密度と温度勾配との関係

エントロピー流密度 $\tilde{S} = \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa$ は温度勾配 ∇T_m の1次式です。 \tilde{S}_θ は ∇T_m に依存
しないが、 \tilde{S}_D と \tilde{S}_κ とは ∇T_m に比例するからです。このために、原動機のように ∇T_m
が大きい場合には \tilde{S}_θ が $\tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa \leq 0$ に比べて無視できる可能性がある。

エントロピー流密度 \tilde{S} と温度勾配 ∇T_m の間には次の関係がある：

$$\frac{\nabla T_m}{T_m} = \frac{\tilde{S}_\theta - \tilde{S}}{\kappa_D + \kappa} \quad (4.17)$$

この関係を導く。まず、 $\tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa$ が ∇T_m に比例することを思い出すと

$$\frac{\nabla T_m}{T_m} = -\frac{\tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa}{\kappa_D + \kappa}$$

です。さらに

$$\tilde{S} = \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa$$

に注意すると(4.17)が得られる。当然のことながら、 $\nabla T_m = 0$ では、 $\tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa = 0$ なので、 $\tilde{S} = \tilde{S}_\theta$ です。

(4.17)の左辺は正なので、右辺の分子も正です。このためにエントロピー流密度 \tilde{S} の範囲は次のように制限される。ヒートポンプ ($\tilde{S} > 0$) では

$$0 < \tilde{S} < \tilde{S}_\theta$$

ですが、ヒートポンプ以外 ($\tilde{S} \leq 0$) では

$$\tilde{S} \leq \min \{ \tilde{S}_\theta, 0 \}$$

です。

定常状態のエネルギー流密度 $\tilde{E} = \tilde{I} + T\tilde{S} \leq 0$ の T_m に替えると、周期的定常状態のエネルギー流密度 $\tilde{E} = \tilde{I} + T_m\tilde{S} \leq 0$ になる。

(4.17)とエネルギー流密度 $\tilde{E} = \tilde{I} + T_m\tilde{S} \leq 0$ から \tilde{S} を消去すると

$$\nabla T_m = \frac{\tilde{I} + T_m\tilde{S}_\theta - \tilde{E}}{\kappa_D + \kappa} \quad (4.18)$$

です。これは次に述べるシミュレーション計算に役立つ。

$\nabla T_m \geq 0$ なので、(4.18)によれば、エネルギー流密度 $\tilde{E} \leq 0$ には上限がある：

$$\tilde{E} \leq \tilde{I} + T_m\tilde{S}_\theta$$

等号は、 $\nabla T_m = 0$ の場合です。さらに、 $\omega\tau_\alpha \gg \pi$ では $\tilde{I} + T_m\tilde{S}_\theta \sim \tilde{I}$ です。

4.4 数値計算による軸方向シミュレーション

ここまでの議論で明らかのように、位相差 θ が重要です。定在波と進行波の意味合い、原動機の必要条件を示す図4.2とヒートポンプの必要条件を示す図4.5などから判断すると、位相差 θ は数式表現上の便利さを超えている。実際、熱音響現象の理解が進んだ20世紀の最後の10年間のキーワードは位相差 θ だった。特に温度勾配が有限の所での位相差 θ の分布が重要です。

熱音響現象の数値計算によるシミュレーションが始まったのは1990年前後です。

数値計算によるシミュレーションの準備を行う。

∇p と ∇u については、それぞれ、運動量保存則の線形近似

$$\nabla p = -\frac{1}{1-\chi_\nu} \rho_m \frac{\partial \langle u \rangle_r}{\partial t} \quad (3.8)$$

と質量保存則の線形近似

$$\left[1 + (\gamma - 1)\chi_\alpha\right] K_S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \langle u \rangle_r - \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \beta \nabla T_m = 0 \quad (3.25)$$

の変形

$$\nabla \langle u \rangle_r = -\left[1 + (\gamma - 1)\chi_\alpha\right] K_S \frac{\partial p}{\partial t} + \beta \nabla T_m \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \quad (4.19)$$

とを使う。複素表示なので、時間についての偏微分 $\partial/\partial t$ は $i\omega$ に置き換えることが出来る。

∇T_m については、

$$\nabla T_m = \frac{\tilde{I} + T_m \tilde{S}_\theta - \tilde{E}}{\kappa_D + \kappa} \quad (4.18)$$

です。ただし

$$\kappa_D \equiv \Im \langle g_D^\dagger \rangle_r \rho_m C_p \frac{1}{2} \langle \hat{\xi} \rangle_r \langle \hat{u} \rangle_r = \frac{\Im \langle g_D^\dagger \rangle_r}{\omega} \frac{\rho_m C_p}{Z} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r > 0 \quad (4.14)$$

$$\tilde{I} \equiv \langle p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t = \Re \exp i \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cdot \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r = \sin \theta \cdot \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.1)$$

$$\tilde{S}_\theta \equiv -\beta \langle \langle f_\alpha p \cdot u \rangle_t \rangle_r = -s_\theta \beta \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.10)$$

を使うと(4.18)の右辺は ω 、 p_m 、 p 、 $\langle u \rangle_r$ 、 T_m と \tilde{E} とで決まる。

熱伝導度の大きい材料で作られた吸放熱器では $\nabla T_m \simeq 0$ なので、(4.18)により

$$\tilde{E} \simeq \tilde{I} + \tilde{S}_\theta$$

です。

これで数値計算シミュレーションの準備が出来た。

数値計算シミュレーション手順の一例を手短に紹介する。

熱音響機器の幾何学的形状、特に、内半径 r_0 の分布を与える。

気体の種類を与える。熱音響機器では角周波数 ω と時間平均圧力 p_m は一樣なので、 ω と p_m を与える。

計算の開始位置を決める。例えば蓄熱器の低温端を計算開始位置とする。

計算開始位置での時間平均温度 T_m を与える。

そうすると、計算開始位置での、熱伝導度 κ 、熱膨張率 β 、時間平均密度 ρ_m 、断熱圧縮率 K_S と熱拡散係数 α と動粘性係数 ν が決まる。熱拡散係数 α と動粘性係数 ν に依存する χ_α 、 χ_ν が決まるので、 $\langle g^\dagger \rangle_r$ 、 $\langle g_D^\dagger \rangle_r$ 、 $\langle h \rangle_r$ 、 s_θ も決まる。

計算開始位置で、複素表示の

$$p = \hat{p} \exp i(\omega t + \theta)$$

$$\langle u \rangle_r = i\omega \langle \xi \rangle_r = i\omega \langle \hat{\xi} \rangle_r \exp i\omega t = \langle \hat{u} \rangle_r \exp i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

を与える。そうすると、その場所での

$$\tilde{I} \equiv \langle p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t = \Re \exp i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r = \sin \theta \cdot \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.1)$$

$$\tilde{S}_\theta \equiv -\beta \langle \langle f_\alpha p \cdot u \rangle_t \rangle_r = -s_\theta \beta \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.9)$$

$$\kappa_D \equiv \Im \langle g_D^\dagger \rangle_r \rho_m C_p \frac{1}{2} \langle \hat{\xi} \rangle_r \langle \hat{u} \rangle_r = \frac{\Im \langle g_D^\dagger \rangle_r \rho_m C_p}{\omega} \frac{1}{Z} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r > 0 \quad (4.14)$$

と

$$\nabla p = -\frac{i\omega}{1 - \chi_\nu} \rho_m \langle u \rangle_r \quad (3.8)$$

$$\nabla \langle u \rangle_r = -\left[1 + (\gamma - 1)\chi_\alpha\right] K_S \frac{\partial p}{\partial t} + \beta \nabla T_m \langle h \rangle_r \langle u \rangle_r \quad (4.19)$$

が決まる。

計算開始位置でのエネルギー流密度 \tilde{E} を与える。計算開始位置での温度勾配が決まる：

$$\nabla T_m = \frac{\tilde{I} + T_m \tilde{S}_\theta - \tilde{E}}{\kappa_D + \kappa} \quad (4.18)$$

蓄熱器が熱機関として動作する馬合には $\tilde{E} \leq 0$ ですが、蓄熱器が仕事流の増幅器として動作している馬合には $\tilde{E} \leq 0$ とは限らない。吸放熱器や導波管等では $\tilde{E} \geq 0$ の場合もある。蓄熱器、吸放熱器、導波管等の中では部品毎に \tilde{E} が一様です。

計算開始位置での仕事源 W とエントロピー流密度 \tilde{S} とエントロピー生成密度 σ とは、それぞれ、

$$W = W_\theta + W_A$$

ただし

$$W_A \equiv -\left(\Im \chi_\alpha^\dagger \frac{1}{2} (\gamma - 1) K_S \hat{p}^2 + \Im \left(\frac{1}{1 - \chi_\nu^\dagger}\right) \frac{1}{2} \rho_m \langle \hat{u} \rangle_r^2\right) \omega \leq 0 \quad (4.3)$$

$$W_\theta \equiv w_\theta \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.4)$$

と

$$\tilde{S} = \frac{1}{T_m} (\tilde{E} - \tilde{I})$$

と

$$\sigma = \frac{1}{T_m} (-W - \tilde{S} \nabla T_m) \geq 0$$

とです。Wと \tilde{S} と σ を計算し出力することは、不必要だが、プログラムの誤りや、計算誤差の集積などに気付くきっかけとなる。

次に p 、 $\langle u \rangle_r$ 、 T_m の軸方向の分布を推定する。 δz だけズレた場所での p 、 $\langle u \rangle_r$ 、 T_m は、元の場所での p 、 $\langle u \rangle_r$ 、 T_m よりそれぞれ

$$\delta p = \nabla p \delta z$$

$$\delta \langle u \rangle_r = \nabla \langle u \rangle_r \delta z$$

$$\delta T_m = \nabla T_m \delta z$$

だけズレる。そこでの ∇p 、 $\nabla \langle u \rangle_r$ 、 ∇T_m は、それぞれ、(3.8)、(4.18)、(4.18)で決まる。そこでのWと \tilde{S} と σ を計算し出力することも出来る。

この作業を繰り返すと蓄熱器内での p 、 $\langle u \rangle_r$ 、 T_m の分布だけでなく、 \tilde{I} 、 W 、 \tilde{S} 、 σ の分布も決まる。

流路断面積 A の異なる部品間の接続では、 p と T_m と体積流量 $A \langle u \rangle_r$ を連続とする。 p と T_m とは示強性の量なので連続です。 p と T_m が連続なので ρ_m も連続です。このために $A \langle u \rangle_r$ の連続性は質量流量 $\rho_m A \langle u \rangle_r$ の連続性と同じです。 p と $A \langle u \rangle_r$ の連続性は $A \tilde{I} \equiv \langle p \cdot A \langle u \rangle_r \rangle_t$ の連続性を保証している。 $T_m A \tilde{S}$ の跳びは吸放熱量に対応する。

ここで紹介した数値積分は、オイラー法です。オイラー法の数値積分を理解することは容易だが、積分精度は劣る。オイラー法の数値積分の精度は厳密解をテイラー展開したときの1次までの精度なので、厳密解が1次式でない限り、系統誤差が避けられない。系統誤差を減らそうとして、刻み δz を小さくすると、丸め誤差が集積する。

計算プログラムは少し複雑だが、ルンゲ・クッタ法 (RK4と略記) を使うことで積分精度が遥かに向上する。RK4は厳密解をテイラー展開したときの4次までの精度

で計算できるからです。また刻み δz を変位振幅 $\langle \xi \rangle_r$ 程度まで大きくすることも出来る。RK4は常微分方程式の数値解法でルンゲ（1856-1927年）とクッタ（1867-1944年）が1901年に共同開発した。数値計算でも先人の遺産に感謝したい。

ここでは p 、 $\langle u \rangle_r$ は複素表示のまま取り扱った。数値計算に使うプログラム言語が、複素数に対応していない場合には、実部と虚部に分解して計算する必要があるので、計算プログラムが複雑になる。

4.5 スターリング機関の伝統的理解

スコットランドの牧師スターリングが1816年に発明したとされるスターリング原動機や後のスターリング冷凍機は熱音響機器の仲間です。スターリングの発明で最も重要なのがeconomiserとも呼ばれたgap regeneratorです。蓄熱器(regenerator)は熱音響機器にとっても必要不可欠な部品です。スターリング機関を含めた熱音響機器を理解するには、蓄熱器をきちんと記述し理解することが重要です。

しかし、スターリング機関の伝統的理解では、蓄熱器は議論の対象外で、議論の対象はピストンシリンダー内の気体の熱力学的振る舞いでした。蓄熱器については十分に理解出来ていると誤解したのだろうか？

流体の圧縮膨張過程を等温的とするG. シュミット（1871年）の等温モデルに始まり、流体の圧縮膨張過程に断熱的圧縮膨張をも考慮するように改良したフィンケルシュタイン（1960年）まで大きな変化が見当たらない。フィンケルシュタイン（1960年）以降はシュミットの等温モデルが役立つように蓄熱器の両端に吸放熱器を付けるようになった。現在でもシュミット・フィンケルシュタインの議論はスターリング機関の研究者には受け容れられている⁶ので、これをスターリング機関の伝統的理解と呼ぶことにする。

スターリング機関の伝統的議論は、蓄熱器を除くピストンシリンダー内の流体にサイクル議論を適用することだった。スターリング機関の伝統的議論は、蓄熱器を

⁶ I.Urieli and D.M.Berchowitz : “Stirling Cycle Engine Analysis” (Adam Hilger, 1984)

議論の対象とせずに、 $T-S$ 線図を使ってエネルギー変換を議論する。すでに2.4熱から仕事へのエネルギー変換で述べたように、作業流体の温度変動を確保するために、エネルギー変換に寄与する作業流体は、蓄熱器をまたいで、高温部と低温部との間を往復運動することが必要です。このために流体の変位振幅は大振幅とならざるを得ない。小振幅だったり、高温部内あるいは低温部内だけで運動する流体は死体積 (dead volume) 内の流体として嫌われる。

熱音響現象では、サイクル議論とは異なり、変位振幅が蓄熱器 (regenerator) の長さに比べて充分小さくても差し支えない。蓄熱器は吸放熱器が連続的に分布しているものと見做される：熱容量の大きい蓄熱器の壁は、エントロピーの一時預かり所であり、蓄熱器内のエントロピーの移動はバケツリレー式です。さらに、流体の振動運動を線型近似で議論する熱音響理論では、線型近似が良い近似のためには、変位振幅が小さいことが重要です。

19世紀中頃には、流体物理学が粘性流体を扱えるようになったにも関わらず、スターリング機関の伝統的理解では、作業流体の運動については議論しない。大振幅なので線型近似が使えないことがその理由の一つだろう。振動運動する作業流体は非粘性流体と仮定し、平衡状態の熱力学的議論が可能のように低周波数の極限のみ扱った。このために、エネルギー変換の議論はあるが、仕事流密度やエントロピー流密度のような蓄熱器での輸送量の概念が欠如している。

蓄熱器を主な研究対象とした熱音響理論は流体物理学的議論から始まった。一様温度の円筒管の中の流体の運動に関わるキルヒホッフ理論 (1868年) はシュミット (1871年) より3年早い。クラマースによる拡張キルヒホッフ理論 (1949年) はフィンケルシュタイン (1960年) より11年早い。

流体物理学的議論から始まった熱音響理論は、20世紀末には、仕事流密度やエントロピー流密度などの概念を使って輸送現象を議論するところまで進歩した。

スターリング機関の伝統的議論には、蓄熱器の温度勾配という概念が存在しない。原動機の温度勾配の下限もヒートポンプの温度勾配の上限も存在しない。つま

り、蓄熱器の温度勾配が有限であれば、スターリング原動機としての動作が可能であり、蓄熱器の温度勾配がどんなに大きくてもスターリング冷凍機としての動作が可能です。

スターリング機関の伝統的議論では、準静的可逆過程の名の下に、対象とする流体は非粘性 ($Pr = 0$) の仮想的流体と仮定し、流体がほとんど静止している場合を議論した。

非粘性の結果は $\chi_\nu = 0$ に対応する。 $\chi_\nu = 0$ では、 $\mathfrak{S}\chi_\nu = 0$ なので、仮に流体物理学的議論を行ったとしても、拡散方程式が出てこないだけでなく遷移領域も無い。出てくるのは非粘性の波動方程式だけです。既に調べたように、非粘性流体では

$$\langle h \rangle_r = \chi_\alpha$$

$$\mathfrak{S}\langle g_D^\dagger \rangle = \mathfrak{S}\chi_\alpha^\dagger$$

です。さらに、流体がほとんど静止している場合を議論しているので、 $\omega \rightarrow 0$ すなわち $\omega\tau_\alpha \rightarrow 0$ です。すなわち $\Re\chi_\alpha \rightarrow 1$ かつ $\mathfrak{S}\chi_\alpha^\dagger \rightarrow 0$ です。このことを考慮すると、非粘性 ($\chi_\nu = 0$) かつ低周波数の極限 ($\omega\tau_\alpha \rightarrow 0$) を議論する伝統的議論では、

$$\langle h \rangle_r = 1$$

$$\mathfrak{S}\langle g_D^\dagger \rangle = 0$$

です。

非粘性 ($\chi_\nu = 0$) かつ低周波数の極限 ($\omega\tau_\alpha \rightarrow 0$) のみ議論する伝統的議論では、仕事源

$$W = W_\theta + W_A$$

については、

$$W_\theta \rightarrow \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \sin \theta$$

$$W_A \rightarrow 0$$

です。

前者により、スターリング原動機では W_θ が正で大きくなるように $\theta \sim \pi/2$ とし、スターリング原動機の逆転と理解されたスターリング冷凍機では $-W_\theta$ が正で大きくなるように $\theta \sim -\pi/2$ とする。

後者により、伝統的議論では $W_A < 0$ が見当たらない。 $W_A \rightarrow 0$ では $\Theta_W \rightarrow 0$ です。伝統的議論ではスターリング原動機に温度勾配の下限という概念が存在しないのは $\Theta_W \rightarrow 0$ のためです。

伝統的議論では、 $\omega\tau_\alpha \rightarrow 0$ のために $\mathfrak{S}\chi_\alpha^\dagger \rightarrow 0$ となり、 W_θ の定在波成分は無い。このために、伝統的理解では、定在波型原動機が理解不能です。

伝統的議論では、エントロピー流密度

$$\tilde{S} = \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa$$

については

$$\tilde{S}_\theta \rightarrow -\beta \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \sin \theta$$

$$\tilde{S}_D \rightarrow 0$$

です。前者により、スターリング冷凍機（あるいはヒートポンプ）では \tilde{S}_θ が最大になるように $\theta \sim -\pi/2$ とし、スターリング原動機では \tilde{S}_θ が最小になるように $\theta \sim \pi/2$ とする。

伝統的議論では、 $\tilde{S}_D \rightarrow 0$ なので、ドリムパイプも理解不能です。伝統的議論ではスターリング冷凍機に温度勾配の上限という概念が存在しないのも $\tilde{S}_D \rightarrow 0$ のためです。

伝統的議論では、 \tilde{S}_θ の定在波成分が無い（ $\theta = 0$ では $\tilde{S}_\theta = 0$ ）ので、定在波型冷凍機は理解不能です。

伝統的議論が暗黙裡に無視しているのは \tilde{S}_κ だけです。

エントロピー生成 σ は仕事源 W やエントロピー生成を使うことで評価できる。定常状態の熱力学第一法則

$$W + \tilde{S} \nabla T + T\sigma = 0 \tag{1.8}$$

の T を T_m に置き換えて

$$\sigma = \frac{-1}{T_m} \left(W + \tilde{S} \nabla T_m \right)$$

です。

巷には「スターリング機関の効率はカルノー効率に近い」という意見があるが、この意見は妄想すなわち現実離れした机上の空論に過ぎない。伝統的議論では、準静的可逆過程を満足するように $Pr = 0$ の仮想的流体を対象とし、流体物理学的議論を避けるために $\omega\tau_\alpha \rightarrow 0$ の極限を議論した。スターリング機関の伝統的議論では

$$W \rightarrow \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \sin \theta$$

$$\tilde{S} \rightarrow -\beta \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \sin \theta + \tilde{S}_\kappa$$

なので、

$$\sigma \rightarrow -\frac{1}{T_m} \tilde{S}_\kappa \nabla T_m = \kappa \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2$$

です。すなわち単純熱伝導によるエントロピー生成だけが有限です。

\tilde{S}_κ を暗黙裡に無視する伝統的議論では、エントロピー生成はゼロです。つまり伝統的議論ではスターリング機関はまさに理想的熱機関です。

しかし、 $Pr = 0$ の流体は存在しないし、 $\omega\tau_\alpha \rightarrow 0$ の極限は静止流体です。

<第4章の参考書>

富永 昭 『熱音響工学の基礎』（1998年 内田老鶴圃）

琵琶哲志 『熱音響デバイス』（2018年 コロナ社）：実験観測事実による裏付けが豊富

第5章 エントロピー生成とエントロピー生成最小の法則

熱力学第一法則と熱力学第二法則とはいずれも非平衡状態の研究から得られた経験則です。過去の現象は全て熱力学第一法則を満足していたが、熱力学第一法則を満足する状態が全て実在するとは限らない。熱力学第一法則を満足する状態のうちで、実在する可能性があるのは熱力学第二法則を満足する状態だけに制限される。

平衡状態の熱力学が進展したのは、熱力学第一法則と熱力学第二法則とが確立された後のことで、主にギブズ（1839-1903年）の19世紀後半の仕事です。現行の熱力学書はギブズ論文の抜粋がほとんどです。このために、熱力学とは平衡状態の熱力学であるとの誤解が生じた。また、平衡状態の熱力学を拡張することで非平衡系の熱力学の建設を目指すことは熱力学史に逆らうことです。

平衡状態の熱力学は、数学的には、平衡曲面に関わる解析幾何学です。内部エネルギー U と体積 V とエントロピー S の張る3次元空間での平衡曲面の傾きは平衡状態を特徴づける温度

$$T \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V$$

や圧力

$$p \equiv - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S$$

です。温度や圧力が決まると、ギブズの自由エネルギー $G \equiv U - TS + pV$ 、ヘルムホルツの自由エネルギー $F \equiv U - TS$ 、エンタルピー $H \equiv U + pV$ が定義できる。

平衡曲面は想定する3次元空間に依存する。ギブズの自由エネルギーと温度と圧力の張る3次元空間、ヘルムホルツの自由エネルギーと温度と体積の張る3次元空間、エンタルピーとエントロピーと圧力の張る3次元空間などがある。ある3次元空間から別の3次元空間に移動するにはマクスウェルの関係式が便利だ。マクスウェルの関係式で馴染みのマクスウェル（1831-79年）は電磁気学のマクスウェル方程式に名を残した。

熱力学第一法則と熱力学第二法則とを満足する状態が全て安定に実現されるとは限らない。熱力学第一法則と熱力学第二法則 $\sigma \geq 0$ とを満足する状態が複数ある場合には、その中でエントロピー生成が最小の状態だけが安定に実現される。このことを主張する経験則がエントロピー生成最小の法則です。例えば、平衡状態は $\sigma = 0$ なので安定です。定常状態では平衡状態へ向かうことを阻止する束縛条件が存在する。束縛条件を満足する定常状態が複数ある場合にはエントロピー生成が最小の定常状態だけが安定に実現される。

エントロピー生成最小の法則は、「散逸構造、複雑系、不可逆性の研究」で1977年度ノーベル化学賞を受賞したイリヤ プリゴジン（1917-2003年）らの著書⁷の中で命名されたが、認識され始めたのは1900年前後です。エントロピー生成最小の法則が熱音響現象の議論に使われ始めたのは21世紀になってからです。

この章ではエントロピー生成最小の法則を使って熱音響現象の熱力学的安定性を議論する。このために熱音響現象のエントロピー生成を議論するだけでなく、定常状態を維持する束縛条件をはっきりさせる必要がある。熱音響現象の実験では、振動モード（角周波数 ω 、位相角 θ 、インピーダンス Z 、 $\omega\tau_\alpha$ などの総称）は実験者が決めることが多い。この場合には振動モードが束縛条件に含まれる。

原動機や熱音響自励振動の実験では、振動モード（角周波数 ω 、位相角 θ 、インピーダンス Z 、 $\omega\tau_\alpha$ などの総称）だけでなくエントロピー流密度 $\tilde{S} < 0$ を実験者が決めるので、 $\tilde{S} < 0$ も束縛条件に含まれる。残るは振幅の2乗 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ と温度勾配 ∇T_m であり、両者の関係は(4.17)です。 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ は κ_D と \tilde{S}_θ に関わるからです。 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ と ∇T_m のどちらか一方が決まれば他方は(4.17)を使って決めることができる。 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ と ∇T_m のどちらか一方を決めるにはこれまで使ってこなかったエントロピー生成最小の法則を使う。

⁷ G.Nicolis and I.Prigogine: “*SELF-ORGANIZATION IN NONEQUILIBRIUM SYSTEMS-From Dissipative Structures to Order through Fluctuations*” (John Wiley & Sons, 1977) 邦訳は小島陽之助、相沢洋二訳『散逸構造』（岩波書店、1980）

5.1 熱音響現象のエントロピー生成密度

熱音響現象のエントロピー生成密度

$$\sigma = -\frac{1}{T_m} \left(W + \tilde{S} \nabla T_m \right) \geq 0$$

を議論する。等号は周期的定常状態の熱力学第一法則

$$W + \tilde{S} \nabla T + T_m \sigma = 0$$

で、不等号は熱力学第二法則です。 $W < 0$ の場合には、 $\tilde{S} \nabla T_m \geq 0$ が大きければ大きいほど σ が小さくなる。この意味でヒートポンプはエントロピー生成最小の法則の表れです。逆に、 $\tilde{S} \nabla T_m < 0$ の場合には、 $W \geq 0$ が大きければ大きいほど σ が小さくなる。この意味で原動機や仕事流の増幅器はエントロピー生成最小の法則の表れです。

熱音響現象のエントロピー生成密度は

$$\sigma = \frac{-W_A}{T_m} - \left(\tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa \right) \frac{\nabla T_m}{T_m} - \frac{W_\theta + \tilde{S}_\theta \nabla T_m}{T_m} \quad (5.1)$$

です。これは仕事源 W に

$$W = W_\theta + W_A$$

を代入し、エントロピー流密度に

$$\tilde{S} = \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa$$

を代入して整理しただけです。

エントロピー生成密度(5.1)は、形式的には、4項の和

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_\kappa + \sigma_D + \sigma_\theta$$

です。

$$\sigma_A \equiv \frac{-W_A}{T_m} = \frac{1}{T_m \ell_A} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \geq 0 \quad (5.2)$$

は無駄な仕事源 $W_A < 0$ に対応するので $\sigma_A \geq 0$ です。 $\sigma_A \geq 0 \nabla T_m$ に依存しない。

$$\sigma_\kappa \equiv -\tilde{S}_\kappa \frac{\nabla T_m}{T_m} = \kappa \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2 \geq 0 \quad (5.3)$$

は無駄なエントロピー流 $\tilde{S}_\kappa < 0$ に対応するので $\sigma_\kappa \geq 0$ です。 $\sigma_\kappa \geq 0$ は ∇T_m の2乗に比例している。

$$\sigma_D \equiv -\tilde{S}_D \frac{\nabla T_m}{T_m} = \kappa_D \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2 \geq 0 \quad (5.4)$$

は $\tilde{S}_D < 0$ に対応し $\sigma_D \geq 0$ です。 $\sigma_D \geq 0$ も ∇T_m の2乗に比例している。 $\sigma_A \geq 0$ 、 $\sigma_\kappa \geq 0$ 、

$\sigma_D \geq 0$ なので、 $\sigma_A + \sigma_\kappa + \sigma_D \geq 0$ です。

最後の位相差 θ に依存するエントロピー生成密度

$$\sigma_\theta \equiv -\frac{W_\theta + \tilde{S}_\theta \nabla T_m}{T_m}$$

は、熱音響熱機関で重要なエントロピー生成で、 $\beta \nabla T_m$ に比例し、 σ_θ は $\cos \theta$ に比例する定在波成分

$$-[\Im \langle h^\dagger + g^\dagger \rangle_r \cos \theta] \frac{\beta \nabla T_m}{T_m} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

と $\sin \theta$ に比例する進行波成分

$$-[\Re \langle h^\dagger - g^\dagger \rangle_r \sin \theta] \frac{\beta \nabla T_m}{T_m} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

との和です：

$$\sigma_\theta = -[\Re \langle h^\dagger - g^\dagger \rangle_r \sin \theta + \Im \langle h^\dagger + g^\dagger \rangle_r \cos \theta] \frac{\beta \nabla T_m}{T_m} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (5.5)$$

(5.5)を示すには、

$$W_\theta \equiv w_\theta \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.4)$$

$$\tilde{S}_\theta = s_\theta \beta \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.10)$$

を使って

$$\frac{W_\theta + \tilde{S}_\theta \nabla T_m}{T_m} = (w_\theta + s_\theta) \frac{\beta \nabla T_m}{T_m} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

とする。さらに

$$w_\theta \equiv |\langle h \rangle_r| \sin(\theta - \arg \langle h \rangle_r) \quad (4.5)$$

$$s_\theta \equiv -|\langle g^\dagger \rangle_r| \sin(\theta - \arg \langle g^\dagger \rangle_r) \quad (4.11)$$

を使うと、

$$w_\theta = \Re \langle h \rangle_r \sin \theta - \Im \langle h \rangle_r \cos \theta = \Re \langle h^\dagger \rangle_r \sin \theta + \Im \langle h^\dagger \rangle_r \cos \theta$$

$$s_\theta \equiv -\Re \langle g^\dagger \rangle_r \sin \theta + \Im \langle g^\dagger \rangle_r \cos \theta$$

なので、

$$w_\theta + s_\theta = \Re \langle h^\dagger - g^\dagger \rangle_r \sin \theta + \Im \langle h^\dagger + g^\dagger \rangle_r \cos \theta$$

です。これで(5.5)が明かです。

σ_θ に寄与するのは主に σ_θ の定在波成分です。 σ_θ の進行波成分は σ_θ にほとんど寄与しない：

$$\sigma_\theta \simeq -\Im \langle h^\dagger + g^\dagger \rangle_r \cos \theta \frac{\beta \nabla T_m}{T_m} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r$$

後に示す粗い近似では

$$\Re \langle h^\dagger - g^\dagger \rangle_r = -\Re (\langle g^\dagger \rangle_r - \langle h \rangle_r) \simeq 0$$

だからです。

さらに、

$$\sigma_\theta \simeq -2\Im\langle g_D^+ \rangle_r \cos\theta \frac{\beta \nabla T_m}{T_m} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (5.6)$$

です。粗い近似では

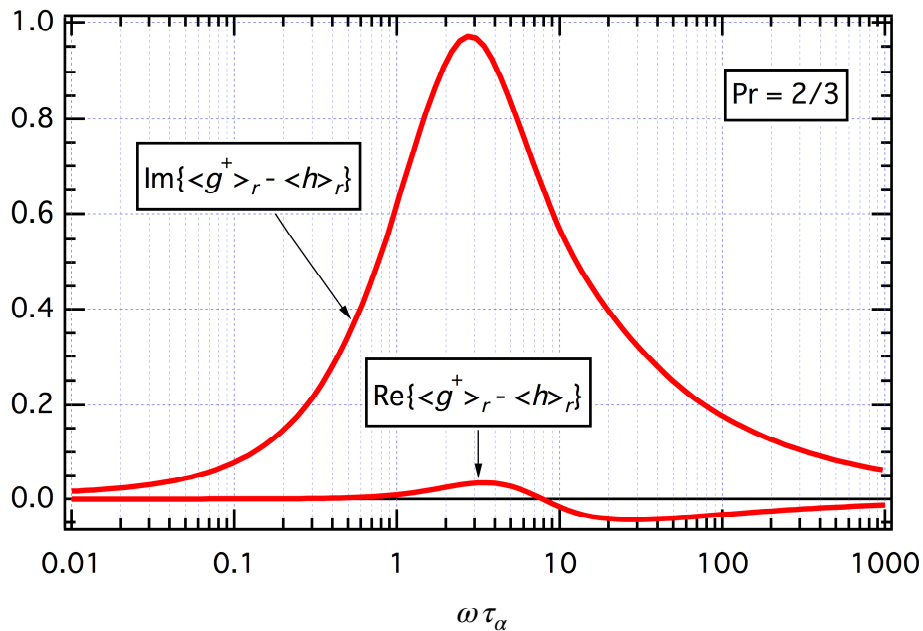


図5.1 プラントル数が2/3の場合の $\langle g^+ \rangle_r - \langle h \rangle_r$ の $\omega \tau_\alpha$ 依存性：実部は虚部に比べて著しく小さい。

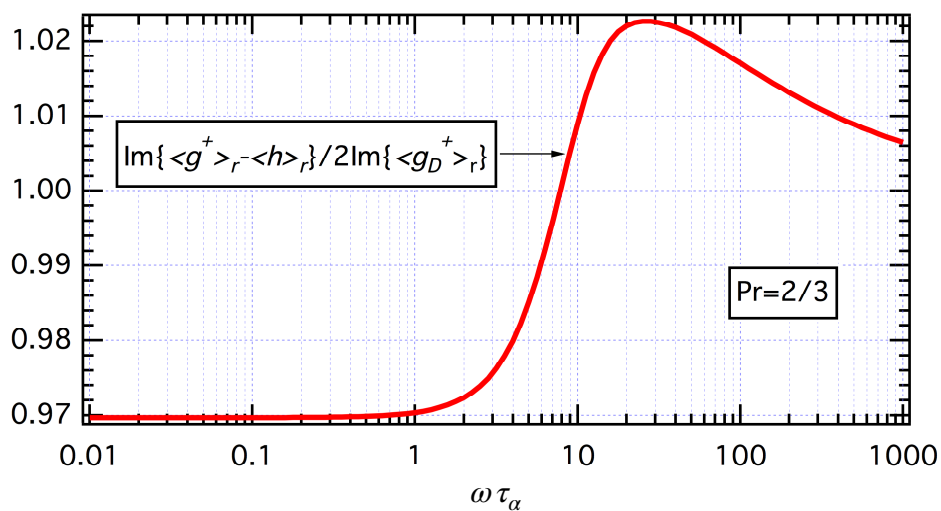


図5.2 プラントル数が2/3の場合の $\Im(\langle g^+ \rangle_r - \langle h \rangle_r) / (2\Im\langle g_D^+ \rangle_r)$ の $\omega \tau_\alpha$ 依存性： $\Im(\langle g^+ \rangle_r - \langle h \rangle_r)$ と $2\Im\langle g_D^+ \rangle_r$ との相違は0.3%以下です。

$$\Im \langle h^\dagger + g^\dagger \rangle_r = \Im (\langle g^\dagger \rangle_r - \langle h \rangle_r) \simeq 2\Im \langle g_D^\dagger \rangle_r > 0$$

だからです。

粗い近似の根拠を示す。気体に対応してPr=2/3の場合の数値計算の結果を見て欲しい。 $\langle g^\dagger \rangle_r - \langle h \rangle_r$ の $\omega\tau_\alpha$ 依存性を図5.1に示す。実部が虚部に比べて著しく小さいことが解る。Pr=2/3の場合はPr=0の場合に近い。 $\Im (\langle g^\dagger \rangle_r - \langle h \rangle_r) / (2\Im \langle g_D^\dagger \rangle_r)$ の $\omega\tau_\alpha$ 依存性を図5.2に示す。 $\Im (\langle g^\dagger \rangle_r - \langle h \rangle_r)$ と $2\Im \langle g_D^\dagger \rangle_r$ との相違は0.3%以下です。以上が粗い近似の根拠です。

Pr = 2/3の場合の数値計算の結果は、Pr \ll 1では、 $\langle g^\dagger \rangle_r - \langle h \rangle_r$ や $\Im \langle g_D^\dagger \rangle_r$ のプラントル数依存性が小さいことの表れです。実際、非粘性 (Pr = 0、 $\chi_\nu = 0$) の場合には

$$\Re (\langle g^\dagger \rangle_r - \langle h \rangle_r) = 0$$

$$\Im (\langle g^\dagger \rangle_r - \langle h \rangle_r) = 2\Im \chi_\alpha^\dagger$$

です。なぜなら、

$$\langle h \rangle_r = \frac{\chi_\alpha - \chi_\nu}{(1 - \text{Pr})(1 - \chi_\nu)} \quad (3.21)$$

と

$$\langle g^\dagger \rangle_r = \frac{\chi_\alpha^\dagger - \chi_\nu}{(1 + \text{Pr})(1 - \chi_\nu)} \quad (4.12)$$

と

$$\Im \langle g_D^\dagger \rangle_r = \frac{\Im \chi_\alpha^\dagger - \text{Pr} \Im \chi_\nu^\dagger}{(1 - \text{Pr}^2) |1 - \chi_\nu|^2} > 0 \quad (4.8)$$

とを使うと、非粘性 (Pr = 0、 $\chi_\nu = 0$) の場合には

$$\langle g^\dagger \rangle_r - \langle h \rangle_r = \chi_\alpha^\dagger - \chi_\alpha = 2i\Im \chi_\alpha^\dagger \quad \text{かつ} \quad \Im \langle g_D^\dagger \rangle_r = \Im \chi_\alpha^\dagger > 0$$

だからです。

位相差 θ に依存するエントロピー生成密度 σ_θ は熱音響熱機関で重要です。

まず、(5.6)によれば、 σ_θ の符号は $-\cos \theta$ の符号と同じなので、 $|\theta| < \pi/2$ では $\sigma_\theta < 0$ です。実際の熱音響熱機関の蓄熱器でも位相差 θ は $|\theta| < \pi/2$ です。同じことですが、エントロピー生成密度 σ を減らすには、進行波型より定在波型が有利です。水スターリングエンジンを除く初期の熱音響自励振動や共鳴管冷凍機が定在波型なのはこのためです。純粋な進行波型 $\theta = \pm \pi/2$ の熱音響熱機関は存在しないのは、定在波成分が重ね合わさって $|\theta| < \pi/2$ のほうがエントロピー生成密度 σ が小さくなるためです。

次に、 $\sigma_\theta < 0$ の寄与が大きいのは、流体の振動運動のイメージが複雑な遷移領域です。 $\Im\langle g_D^\dagger \rangle_r > 0$ が大きい遷移領域 ($\pi/10 < \omega\tau_\alpha < 10\pi$) だからです。スターリング関数の伝統的理解には遷移領域が除外されていることに注意して欲しい。

χ_α や χ_ν の虚部は不可逆性に関わりがあるように見えることがある。位相差 θ に依存しない $\sigma_A \geq 0$ と $\sigma_D \geq 0$ とは χ_α や χ_ν の虚部と関わりがあるからです。しかし、 χ_α や χ_ν の虚部が不可逆性に関わりがあるとは限らない。なぜなら、位相差 θ に依存する σ_θ は、 $-\Im\langle g_D^\dagger \rangle_r \cos \theta$ にほぼ比例し、 $|\theta| > \pi/2$ では $\sigma_\theta > 0$ ですが $|\theta| < \pi/2$ では $\sigma_\theta < 0$ だからです。

位相差 θ に依存するエントロピー生成密度 $\sigma_\theta \leq 0$ が最小になるのは $\Im\langle g_D^\dagger \rangle_r$ が最大になる $\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ の場合です。この場合には

$$\theta_W \equiv \arg\langle h \rangle_r = -\frac{\pi}{4} \quad \text{かつ} \quad \theta_S \equiv \arg\langle g^\dagger \rangle_r = \frac{\pi}{4}$$

です (4.1 仕事流密度と仕事源と4.2 エントロピー流密度)。

$\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ の場合の

$$w_\theta \equiv |\langle h \rangle_r| \sin(\theta - \arg\langle h \rangle_r) = \Re\langle h \rangle_r \sin \theta - \Im\langle h \rangle_r \cos \theta \quad (4.5)$$

や

$$s_\theta \equiv -|\langle g^\dagger \rangle_r| \sin(\theta - \arg\langle g^\dagger \rangle_r) = -\Re\langle g^\dagger \rangle_r \sin \theta + \Im\langle g^\dagger \rangle_r \cos \theta \quad (4.11)$$

の位相差依存性が興味深い。

$\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ の場合に、 w_θ が最大になる位相差は

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \theta_W = \frac{\pi}{4}$$

で、この位相差では、

$$\tilde{S}_\theta = 0$$

です。この $\tilde{S}_\theta = 0$ は、 $s_\theta = 0$ の表れなので、 \tilde{S}_θ の定在波成分と進行波成分とが相殺した結果です。

$\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ の場合に、 s_θ が最大になる位相差は

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + \theta_S = -\frac{\pi}{4}$$

で、この位相差では、

$$W_\theta = 0$$

です。この $W_\theta = 0$ は、 $w_\theta = 0$ の表れなので、 W_θ の定在波成分と進行波成分とが相殺した結果です。

エントロピー生成密度 σ は $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ の 1 次式です。 σ_A と σ_D と σ_θ とは $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ に比例しているが、 σ_k だけは $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ と関わりが無いからです。

5.2 強制振動のエントロピー生成密度

エントロピー生成密度 σ は温度勾配 ∇T_m の 2 次式です。

$$\sigma_D + \sigma_k = (\kappa_D + \kappa) \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2$$

は ∇T_m の 2 乗に比例し、

$$\sigma_\theta \simeq -2\mathfrak{I}\langle g_D^\dagger \rangle_r \frac{\beta \nabla T_m}{T_m} \frac{1}{2} \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r \cos \theta \quad (5.6)$$

は ∇T_m に比例し、 σ_A だけは ∇T_m と関わりが無いからです。

強制振動の実験では、振動モード（角周波数 ω 、位相角 θ 、インピーダンス Z 、 $\omega \tau_\alpha$ などの総称）だけでなく振幅の 2 乗 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ も実験者が決めるので、 κ_D と \tilde{S}_θ も束縛条件に含まれる。

残るはエントロピー流密度 \tilde{S} と温度勾配 ∇T_m であり、両者の関係は熱力学第一法則に基づく

$$\frac{\nabla T_m}{T_m} = \frac{\tilde{S}_\theta - \tilde{S}}{\kappa_D + \kappa} \quad (4.17)$$

です。ヒートポンプ ($\tilde{S}_\theta \geq \tilde{S} > 0$) の実験では、エントロピー流密度 $\tilde{S} > 0$ も束縛条件とするとヒートポンプの温度勾配 ∇T_m が決まる。しかし、 $\tilde{S} > 0$ が 0 に近づくあるいは ∇T_m が上限

$$\Theta_S \equiv \frac{T_m \tilde{S}_\theta}{\kappa_D + \kappa}$$

に近づくとき、エントロピー生成最小の法則による不安定性が生じることがある。

微小振幅では、(4.17)により、

$$T_m \tilde{S} \simeq -\kappa \nabla T_m$$

です。

5.2.1 熱音響ヒートポンプの安定性

振幅の2乗 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ が与えられると、エントロピー生成密度 σ は ∇T_m の2次式です。 σ_k と σ_A とは $\Im\langle g_D^\dagger\rangle_r$ に関わらないが、

$$\sigma_D + \sigma_\theta \simeq \kappa_D \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} - \frac{\Theta_\sigma}{T_m} \right)^2 - \kappa_D \left(\frac{\Theta_\sigma}{T_m} \right)^2 \quad (5.7)$$

だからです。ここで

$$\Theta_\sigma \equiv \frac{\beta T_m}{\rho_m C_p} \omega Z \cos \theta$$

は数式表現を見やすくするために導入した温度勾配の次元をもつ量で、 $\Theta_\sigma > 0$ となるのは $|\theta| < \pi/2$ の場合です。(5.7)は

$$\sigma_D \equiv -\tilde{S}_D \frac{\nabla T_m}{T_m} = \kappa_D \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2 \geq 0 \quad (5.4)$$

$$\sigma_\theta \simeq -2 \Im\langle g_D^\dagger\rangle_r \frac{\beta \nabla T_m}{T_m} \frac{1}{2} \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r \cos \theta \quad (5.6)$$

$$\kappa_D \equiv \Im\langle g_D^\dagger\rangle_r \rho_m C_p \frac{1}{2} \langle \hat{\xi} \rangle_r \langle \hat{u} \rangle_r = \frac{\Im\langle g_D^\dagger\rangle_r}{\omega} \frac{\rho_m C_p}{Z} \frac{1}{2} \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r > 0 \quad (4.14)$$

を使うと得られる。(5.6)は(4.14)を使うと

$$\sigma_\theta = -2 \left(\frac{\beta}{\rho_m C_p} \omega Z \cos \theta \right) \kappa_D \frac{\nabla T_m}{T_m}$$

だからです。

(5.7)の右辺は $\nabla T_m/T_m$ の2次式なので、 $\Theta_\sigma > 0$ の場合には、 $\sigma_D + \sigma_\theta < 0$ となるのは

$$0 < \nabla T_m < 2\Theta_\sigma$$

の場合で、

$$\nabla T_m = \Theta_\sigma$$

の場合に最小値

$$-\kappa_D \left(\frac{\Theta_\sigma}{T_m} \right)^2$$

をとる。

強制振動のエントロピー生成 $\sigma = \sigma_A + \sigma_k + \sigma_D + \sigma_\theta$ は、(5.7)により、 ∇T_m の2次式です。 $\sigma_A > 0$ だけは ∇T_m に依存せず、 σ_θ は ∇T_m に比例し、 $\sigma_k > 0$ と $\sigma_D > 0$ とは正で $(\nabla T_m)^2$ に比例しているからです。

大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) では、 σ_k を σ_D に対して無視すると

$$\sigma \simeq \sigma_D + \sigma_\theta + \sigma_A = \kappa_D \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} - \frac{\Theta_\sigma}{T_m} \right)^2 - \kappa_D \left(\frac{\Theta_\sigma}{T_m} \right)^2 + \sigma_A \geq \sigma_A - \kappa_D \left(\frac{\Theta_\sigma}{T_m} \right)^2$$

なので、 $\Theta_\sigma > 0$ の場合には $\nabla T_m = \Theta_\sigma$ で最小となる。 σ の最小値

$$\sigma_A - \kappa_D \left(\frac{\Theta_\sigma}{T_m} \right)^2$$

が正またはゼロの場合には、熱力学第二法則を満足するので、 Θ_σ はエントロピー生成が最小になる温度勾配です。

強制振動のエントロピー生成 σ の温度勾配 ∇T_m 依存性を図5.3に模式的に示す。 $\Theta_\sigma > 0$ の場合です。 σ の最小値が正またはゼロの場合には、この曲線上のすべての状態が熱力学第二法則を満足し、エントロピー生成が最小となる温度勾配が Θ_σ です。エントロピー生成が最小となる温度勾配 Θ_σ は熱力学第一法則による ∇T_m の上限

$$\Theta_S \equiv \frac{T_m \tilde{S}_\theta}{\kappa_D + \kappa_K}$$

とは異なる。

熱音響ヒートポンプとして機能していると、通常は、時の経過と共に温度勾配 $\tilde{S} > 0$ が小さくなるとともに、 ∇T_m が大きくなる。

$\Theta_S \leq \Theta_\sigma$ の場合には、 $\nabla T_m \leq \Theta_S < \Theta_\sigma$ なので、時の経過と共に ∇T_m が増加することはエントロピー生成が減少することを意味し、安定です。

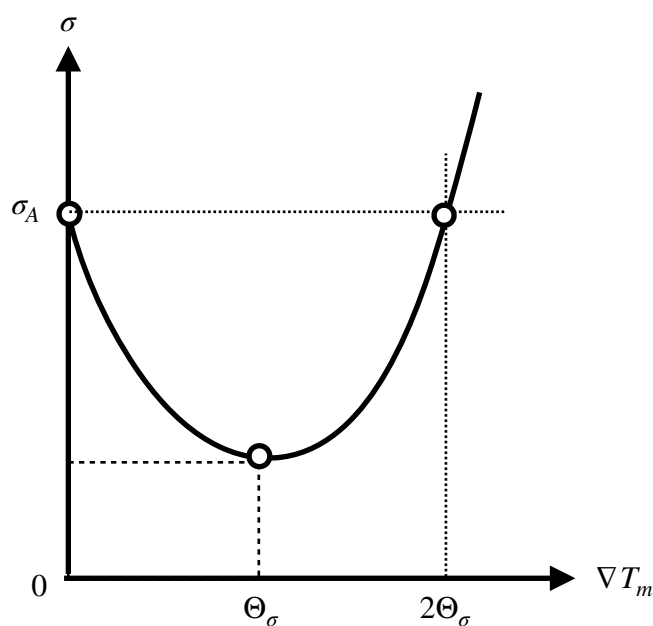


図5.3 強制振動のエントロピー生成密度： $|\theta| < \pi/2$ の場合には、エントロピー生成が最小となる温度勾配 Θ_σ が存在する。

逆に、 $\Theta_\sigma < \Theta_S$ の場合には、 $\nabla T_m < \Theta_\sigma < \Theta_S$ です。この場合には安定な熱音響ヒートポンプの温度勾配 ∇T_m は Θ_σ を超えません。仮に熱音響冷凍機の ∇T_m が Θ_σ を越えると、エントロピー生成が大きくなるので熱力学的に不安定になる。言い換えれば、 $\nabla T_m < \Theta_\sigma$ が維持できるように、安定な熱音響ヒートポンプでは低温部へのヒートリークなどで $\tilde{S} > 0$ をある程度の大きさに保つことが必要です。

パルス管冷凍機でより低い温度を目指していた研究グループからパルス管冷凍機の不安定性が、20世紀の末に、報告された。最低到達温度に到達して数時間経過した後、温度が急激に上昇し、その後ゆっくりと最低到達温度に向かう。この不安定性の一つの理由は上記の熱力学的不安定性です。最低到達温度に到達する迄は $\nabla T_m \leq \Theta_\sigma < \Theta_S$ ですが、ヒートリークなどが小さいために、 ∇T_m が Θ_σ を超えて熱力学的に不安定になる。

5.2.2 共鳴管の共鳴周波数：周波数掃引

共鳴管内の気体を微小速度振幅 $\langle \hat{u} \rangle_r$ で強制振動させながら周波数掃引を行うと、閉端での圧力振幅 \hat{p} が最大になる周波数が見つかる。この周波数は共鳴周波数に等しい。

熱音響自励振動を目指して蓄熱器を装填した共鳴管を想定する。 $\nabla T_m < \Theta_W$ では熱音響自励振動が生じないので、共鳴管の気体を微小振幅 ($\kappa_D \ll \kappa$) で強制振動させることが可能です。共鳴周波数は共鳴管の温度分布に依存する。蓄熱器などの ∇T_m が変わると、共鳴管の一樣温度の部分の温度が変わり、音速が温度の関数だからです。このために、共鳴周波数を捜すには、各 ∇T_m 毎に共鳴周波数の近傍で周波数掃引を行うことが必要です。

共鳴管のQ値は共鳴管に蓄えられているエネルギーと一周期あたりのエネルギー散逸の比に比例する。エネルギー散逸はエントロピー生成に比例するので、Q値はエントロピー生成に反比例する。共鳴管のQ値は振動の周波数に依存し、Q値が最大になる周波数すなわちエントロピー生成が最小になる周波数が共鳴周波数です。

Q値の定義により、共鳴周波数はエントロピー生成密度 σ を管の全体積で積分したものが最小となる周波数です。 σ が大きいのは通常は短い蓄熱器の部分です。

共鳴周波数の近傍で周波数掃引を行う際には、閉端での圧力振幅と蓄熱器での位相差 θ は実験者の自由にはならない。

各 ∇T_m 毎に共鳴周波数の近傍で周波数掃引を行うと、周波数掃引で変化するのは、蓄熱器でのエントロピー生成のうちでは、主に、 θ に依存するエントロピー生成密度

$$\sigma_\theta \simeq -2\Im\langle g_D^\dagger \rangle_r \frac{\beta \nabla T_m}{T_m} \frac{1}{2} \hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r \cos \theta \quad (5.6)$$

です。共鳴周波数の近傍で角周波数 ω を変えると位相差 θ の変化が著しく、 σ が最小になる共鳴周波数では、 $\theta = 0$ となり、定在波近似 $\theta = 0$ が良い近似で成り立つ。

5.3 熱音響自励振動とエントロピー生成最小の法則

熱音響自励振動では、実験者が決めるのは、振動モード（角周波数 ω 、インピーダンス Z 、位相角 θ 、 $\omega\tau_\alpha$ などの総称）とエントロピー流密度 $\tilde{S} < 0$ です。振動モードと $\tilde{S} < 0$ が与えられた場合に、熱音響自励振動がどのように発生するのか、熱音響自励振動の振幅の2乗 $\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$ や温度勾配 ∇T_m がどのように決まるのか議論したい。

エントロピー生成は

$$\sigma = \sigma_S + \sigma_W$$

但し

$$\begin{aligned} \sigma_S &\equiv \frac{-\tilde{S} \nabla T_m}{T_m} > 0 \\ \sigma_W &\equiv -\frac{W}{T_m} \end{aligned} \quad (5.8)$$

です。

(5.8)によれば、 $W > 0$ なら $\sigma_W < 0$ となるので、 $\sigma < \sigma_S$ です。つまり $W > 0$ が可能なら、熱音響自励振動が生じることでエントロピー生成密度 σ が減少する。この意味で、熱音響自励振動はエントロピー生成最小の法則の表れです。

$W > 0$ の必要条件は $\nabla T_m > \Theta_W$ です。 $W > 0$ は ∇T_m の増加関数なので、(5.8)により $\sigma_W < 0$ は ∇T_m の減少関数です。与えられた $\tilde{S} < 0$ のもとでエントロピー生成密度 $\sigma = \sigma_S + \sigma_W$ が最小になるような ∇T_m が存在する。なぜなら、 $\sigma_S > 0$ は ∇T_m の増加関数ですが、 $\sigma_W < 0$ は ∇T_m の減少関数だからです。

エントロピー流密度 $\tilde{S} < 0$ と温度勾配 ∇T_m とが決まると振幅の二乗 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ が決まる。
 \tilde{S} と ∇T_m との間には

$$\frac{\nabla T_m}{T_m} = \frac{\tilde{S}_\theta - \tilde{S}}{\kappa_D + \kappa} \quad (4.17)$$

の関係がある。 κ_D と \tilde{S}_θ は $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ に比例し、

$$\tilde{S}_\theta \equiv -s_\theta \beta \frac{1}{2} \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r \quad (4.10)$$

と

$$\kappa_D = \frac{1}{\Theta_D} \frac{1}{2} \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r \quad (4.16)$$

です。

単純熱伝導分岐では $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r = 0$ なので、 $\tilde{S}_\theta = 0$ かつ $\kappa_D = 0$ となり、(4.17)からは

$$\frac{\nabla T_m}{T_m} = \frac{-\tilde{S}}{\kappa}$$

です。 $\nabla T_m \leq \Theta_W$ の場合に揺らぎなどで生じる振動は不安定な減衰振動です。

(4.17)を考慮すると、与えられたエントロピー流密度 \tilde{S} のもとでエントロピー生成密度 $\sigma = \sigma_S + \sigma_W$ が最小となるような $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ や $\nabla T_m > \Theta_W$ が決まる。これが熱音響自励振動分岐です。この意味でも、熱音響自励振動はエントロピー生成最小の法則の表れです。

熱音響自励振動分岐上で $W = 0$ となる \tilde{S} を \tilde{S}_W とすると、そこでは(5.8)により

$$\sigma_W = 0$$

なので、

$$\sigma = \sigma_S = \frac{-\tilde{S}_W \Theta_W}{T_m}$$

です。最後の等号は $\nabla T_m = \Theta_W$ の表れです。

熱音響自励振動分岐を理論的に求める作業は、与えられたエントロピー流密度 \tilde{S} のもとで(4.17)を満足するような温度勾配 ∇T_m と振幅の二乗 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ の組み合わせの中からエントロピー生成密度が最小となる組み合わせを探すことです。この作業は数学的には変分計算です。

5.3.1 熱音響自励振動の束縛条件

振動モード（角周波数 ω 、インピーダンス Z 、位相差 θ と $\omega\tau_\alpha$ の総称）の選択で特に重要なのは、熱音響自励振動では、 θ と $\omega\tau_\alpha$ です。

熱音響自励振動が生じる温度勾配の下限 $\Theta_W > 0$ が小さくなることを目指す実験者は

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \theta_W$$

(4.1 仕事流密度と仕事源) とし、位相差に依存するエントロピー生成 $\sigma_\theta < 0$ が最小になるように、

$$\omega\tau_\alpha \simeq \pi$$

(5.1 熱音響現象のエントロピー生成) とする。 $\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ では、

$$\theta_W \simeq -\pi/4 \quad \text{かつ} \quad \theta_S \simeq \pi/4$$

なので、

$$\theta \simeq \pi/4 \quad \text{かつ} \quad \tilde{S}_\theta = 0$$

です。

$\tilde{S}_\theta = 0$ では

$$\tilde{S} = \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa = -(\kappa_D + \kappa) \frac{\nabla T_m}{T_m}$$

あるいは

$$\frac{\nabla T_m}{T_m} = \frac{-\tilde{S}}{\kappa_D + \kappa} \tag{5.9}$$

です。

以下の議論では、 $\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ かつ $\theta = \pi/4$ の場合に限定する。この場合には $\tilde{S}_\theta = 0$ なので、(4.17)は(5.9)となる。

熱音響自励振動分岐 ($\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r \neq 0$) と単純熱伝導分岐 ($\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r = 0$) の間の定性的関係が判る。(5.9)によれば、エントロピー流密度の大きさ $-\tilde{S} \geq 0$ については、温度勾配 ∇T_m が同じなら、熱音響自励振動分岐は単純熱伝導の場合の $\kappa_D/\kappa + 1$ 倍です。同じことだが、 ∇T_m については、エントロピー流密度 $\tilde{S} < 0$ が同じなら、単純熱伝導分岐は熱音響自励振動分岐の $\kappa_D/\kappa + 1$ 倍です。

$\kappa_D/\kappa > 0$ は振幅の二乗 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ に比例するので、熱音響自励振動分岐の振幅の大小の目安になる： $\kappa_D/\kappa \ll 1$ では小振幅、 $\kappa_D/\kappa \gg 1$ では大振幅です。 $\tilde{S} = \tilde{S}_\kappa + \tilde{S}_D$ については、小振幅 ($\kappa_D/\kappa \ll 1$) では、 $\tilde{S}_D \ll \tilde{S}_\kappa$ なので、

$$\tilde{S} \sim \tilde{S}_\kappa$$

です。逆に、大振幅 ($\kappa_D/\kappa \gg 1$) では、 $\tilde{S}_D \gg \tilde{S}_\kappa$ なので、

$$\tilde{S} \sim \tilde{S}_D$$

です。

5.3.2 エントロピー生成密度最小の条件

与えられたエントロピー流密度 $\tilde{S} < 0$ のもとで、熱音響自励振動のエントロピー生成密度

$$\sigma = \frac{1}{T_m} [-\tilde{S} \nabla T_m - W] = \frac{1}{T_m} \left[(-\tilde{S} \nabla T_m - W_A) - W_\theta \right] \quad (5.10)$$

は熱力学第一法則の結果です。

熱音響自励振動現象では $W > 0$ なので、 $W_\theta > 0$ だけでなく $\Theta_W > 0$ です。また熱力学第二法則 $\sigma \geq 0$ により

$$-\tilde{S} \nabla T_m - W_A \geq W_\theta > 0$$

が必要です。この必要条件を満足する範囲内で、エントロピー生成密度 $\sigma \geq 0$ が最小になるような温度勾配 ∇T_m と振幅の二乗 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ の組み合わせが熱音響自励振動分岐です。

$\sigma \geq 0$ は、 $-\tilde{S} \nabla T_m - W_A > 0$ の増加関数ですが、 $W_\theta > 0$ の減少関数です。

$-\tilde{S} \nabla T_m - W_A > 0$ と $W_\theta > 0$ とを別々に議論する。

$-\tilde{S} \nabla T_m - W_A \geq 0$ を調べる。これは

$$\tilde{S} \nabla T_m = W_A \quad (5.11)$$

の場合に最小値

$$2(-W_A) \quad \text{あるいは} \quad 2(-\tilde{S}) \nabla T_m$$

をとる。このことは、2つの正の量 $-\tilde{S} \nabla T_m > 0$ と $-W_A > 0$ の相加平均と相乗平均との関係

$$\frac{1}{2} \left(-\tilde{S} \nabla T_m - W_A \right) \geq \sqrt{\left(-\tilde{S} \nabla T_m \right) \left(-W_A \right)}$$

から明かです。

束縛条件 $\tilde{S}_\theta = 0$ を思い出すと、(5.11) の場合は、エントロピー流密度 $\tilde{S} = \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa < 0$ によるエントロピー生成 $\sigma_D + \sigma_\kappa > 0$ と仕事の散逸 $W_A < 0$ によるエントロピー生成 $\sigma_A > 0$ とが等しい場合である：

$$\sigma_D + \sigma_\kappa = \sigma_A \quad (5.12)$$

この左辺 $\sigma_D + \sigma_\kappa$ は $\nabla T_m / T_m$ の2乗に比例するが、右辺 σ_A は ∇T_m に依らないので、

$$\frac{\nabla T_m}{T_m} = \sqrt{\frac{\sigma_A}{\kappa_D + \kappa}} < \sqrt{\frac{\sigma_A}{\kappa_D}}$$

です。

温度勾配の次元を持つ定数

$$\Theta_{max} \equiv T_m \sqrt{\frac{\sigma_A}{\kappa_D}} = \sqrt{\Theta_D \cdot \frac{T_m}{\ell_A}} \quad (5.13)$$

を導入すると、

$$\nabla T_m = T_m \sqrt{\frac{\sigma_A}{\kappa_D + \kappa}} < \Theta_{max}$$

です。 Θ_{max} は(5.12)すなわち(5.11)の場合の ∇T_m の上限です。

同じことですが、 σ_A と κ_D とは $\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$ に比例するので、(5.11)の場合の ∇T_m は、 $\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$ の増加関数で、小振幅 ($\kappa_D \ll \kappa$) では $\sqrt{\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r}$ に比例し、大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) では $\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$ 依存性が小さく Θ_{max} に近い。

このことと

$$\frac{\nabla T_m}{T_m} = \frac{-\tilde{S}}{\kappa_D + \kappa} \quad (5.9)$$

とを考慮すると、(5.11)の場合の $\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$ は、小振幅 ($\kappa_D \ll \kappa$) では $-\tilde{S}$ の2乗に比例し、大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) では $-\tilde{S}$ の一次式となる。

次に、 $W_\theta > 0$ を調べる。

$$W_\theta = w_\theta \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.4)$$

と(5.9)とから ∇T_m を消去すると

$$W_\theta = w_\theta \beta T_m \frac{\frac{1}{2} \hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r}{\kappa_D + \kappa} \left(-\tilde{S} \right)$$

です。

$$\kappa_D = \frac{1}{\Theta_D} \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.16)$$

を使うと、

$$W_\theta = w_\theta \beta T_m \frac{\kappa_D}{\kappa_D + \kappa} \Theta_D (-\tilde{S})$$

です。数式表現を見やすくするために、温度勾配の次元をもつ定数

$$\Theta_{min} \equiv \frac{1}{2} w_\theta \beta T_m \Theta_D$$

を導入すると、

$$W_\theta = 2 \frac{\kappa_D}{\kappa_D + \kappa} \Theta_{min} (-\tilde{S}) < 2 \Theta_{min} (-\tilde{S})$$

です。したがって、 $W_\theta > 0$ は、 $\kappa_D \propto \hat{p} \langle \hat{u} \rangle$ の単調増加関数で、 $\kappa_D \propto \hat{p} \langle \hat{u} \rangle$ が大きければ大きいほど $W_\theta > 0$ が大きくなる。 $\kappa_D = \kappa$ では $W_\theta \simeq \Theta_{min} (-\tilde{S})$ ですが大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$)では

$$W_\theta \simeq 2 \Theta_{min} (-\tilde{S}) \quad (5.14)$$

です。

こういうわけで、エントロピー生成密度(5.10)は、大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) では、(5.11)の場合に最小値

$$\sigma = \frac{1}{T_m} \left[2(-W_A) - W_\theta \right] \quad (5.15)$$

あるいは

$$\sigma = \frac{1}{T_m} \left[2(-\tilde{S}) \nabla T_m - W_\theta \right] \quad (5.16)$$

をとる。

大振幅かつ(5.11)の場合の温度勾配 ∇T_m には熱力学第二法則 ($\sigma \geq 0$) による上限 $2\Theta_W$ がある：

$$\nabla T_m \leq 2\Theta_W$$

なぜなら、(5.15)に $\sigma \geq 0$ を使うと

$$2(-W_A) \geq W_\theta$$

です。この不等式に

$$W_\theta = w_\theta \beta \nabla T_m \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r \quad (4.4)$$

と

$$\Theta_W \equiv \frac{-W_A}{w_\theta \beta \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r} = \frac{1}{w_\theta \beta \ell_A} \quad (4.7)$$

を使うと得られる。

大振幅かつ(5.11)の場合のエントロピー生成密度(5.16)は $-\tilde{S} > 0$ にほぼ比例する：

$$\sigma \simeq \frac{2}{T_m} [\nabla T_m - \Theta_{min}] (-\tilde{S}) \quad (5.17)$$

これは(5.16)の W_θ に大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) 近似(5.14)を使った結果なので、大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) とは言えない場合には(5.17)はエントロピー生成密度(5.16)を小さめに評価している。

(5.17)に熱力学第二法則 ($\sigma \geq 0$) を適用すると $\nabla T_m \geq \Theta_{min}$ です。つまり大振幅かつ(5.11)の場合の温度勾配 ∇T_m には熱力学第二法則 ($\sigma \geq 0$) による下限 Θ_{min} がある。しかし、温度勾配 ∇T_m が小さいところでは、大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) とは言えないので、この下限 Θ_{min} は過大評価でしょう。

熱音響自励振動が生じるには、 $W > 0$ が必要なので、 $\nabla T_m > \Theta_W$ も必要ですが、通常は

$$\Theta_{min} < \Theta_W$$

なので、熱音響自励振動が生じるには

$$\Theta_W < \nabla T_m \leq 2\Theta_W \quad (5.18)$$

で充分です。

大振幅かつ(5.11)の場合の温度勾配 ∇T_m に関わる条件が2つ出てきた。(5.18)と

$$\nabla T_m < \Theta_{max}$$

とです。両者をまとめると

$$\Theta_W < \Theta_{max} \leq 2\Theta_W \quad (5.19)$$

です。

今後はエントロピー生成密度 σ が最小となる条件として、振幅の大小に関わらず、(5.11)を使う。 σ には、 $-\tilde{S} \nabla T_m - W_A \geq 0$ と $W_\theta > 0$ とが寄与するが、小振幅 ($\kappa_D \ll \kappa$) では、 $W_\theta > 0$ が小さいので、 $-\tilde{S} \nabla T_m - W_A \geq 0$ が主となるからです。大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) とは言えない場合には、熱音響自励振動分岐の ∇T_m を過小評価し、振幅の2乗 $\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$ を過大評価することになる。

大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) 近似が $-\tilde{S}$ の広い領域で成り立つには、 Θ_D が小さいことが必要です。(4.16)によれば κ_D は Θ_D に反比例するので、 Θ_D が小さい場合には大振幅

$(\kappa_D \gg \kappa)$ が成り立ちやすい。(5.13)によれば、 Θ_D が小さい場合には $\Theta_{max} > \Theta_W$ が小さくなり Θ_W に近づく。不等式 $\Theta_{max} > \Theta_W$ を満足する範囲で Θ_D が小さい場合には大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) 近似が良い近似となる。

以下では、 $\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ かつ $\theta = \pi/4$ つまり $\tilde{S}_\theta = 0$ の場合の熱音響自励振動分岐をより具体的に調べる。このために、

$$\frac{\nabla T_m}{T_m} = \frac{-\tilde{S}}{\kappa_D + \kappa} \quad (5.9)$$

と

$$\tilde{S} \nabla T_m = W_A \quad (5.11)$$

とを使う。振幅の2乗 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ に関わるのは第3章の

$$W_A = -\frac{1}{\ell_A} \frac{1}{2} \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r \quad (4.6)$$

と

$$\kappa_D = \frac{1}{\Theta_D} \frac{1}{2} \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r \quad (4.16)$$

とである。

5.3.3 熱音響自励振動分岐の振幅の二乗 $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$

$\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ かつ $\theta = \pi/4$ の場合に、 $-\tilde{S} \nabla T_m - W_A$ が最小になるような $\hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ と $-\tilde{S} > 0$ との関係は

$$\left(\frac{\kappa_D}{\kappa}\right)^2 + \frac{\kappa_D}{\kappa} = \frac{\ell_A}{T_m \Theta_D} \left(\frac{-T_m \tilde{S}}{\kappa}\right)^2 \quad (5.20)$$

です。(5.20)を導出するには、2つの関係式(5.9)と(5.11)とから ∇T_m を消去した

$$(\kappa_D + \kappa) (-W_A) = (-T_m \tilde{S})^2$$

を使う。さらに、(4.6)と(4.16)とを使うと、(5.20)が得られる。

(5.20)に(5.13)を使うと、

$$\left(\frac{\kappa_D}{\kappa}\right)^2 + \frac{\kappa_D}{\kappa} = \left(\frac{-T_m \tilde{S}/\kappa}{\Theta_{max}}\right)^2 \quad (5.21)$$

となる。 $T_m (-\tilde{S})/\kappa$ は単純越伝導分岐の温度勾配であり、 Θ_{max} は熱音響自励振動分岐の温度勾配の上限です。(5.21)を変形すると

$$\left(\frac{\kappa_D}{\kappa} + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-T_m \tilde{S}}{\kappa}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

よって、 $\kappa_D/\kappa \propto \hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$ の $-\tilde{S} > 0$ 依存性は、

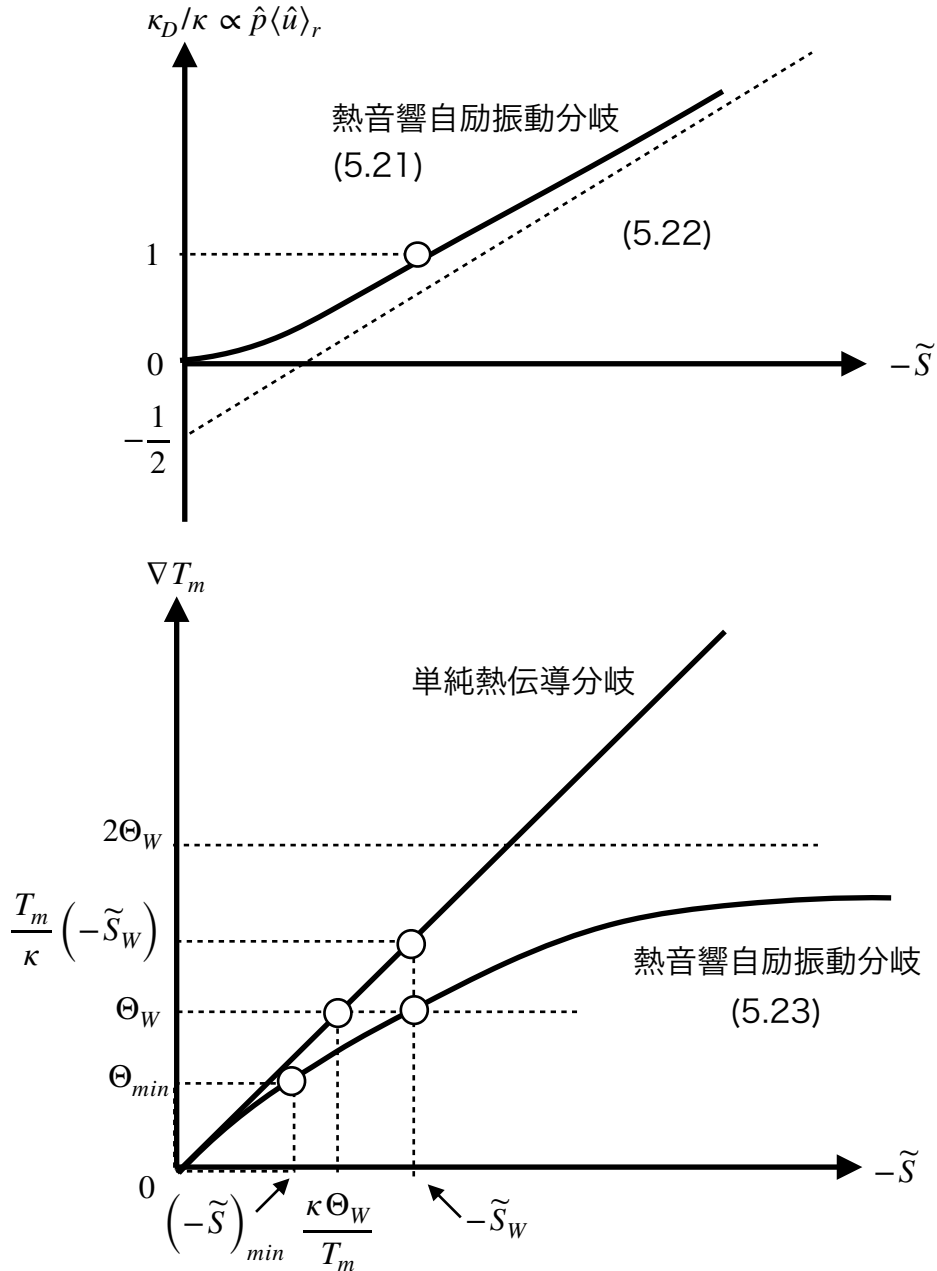


図5.4 $\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ かつ $\theta = \pi/4$ の場合の $\hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$ と ∇T_m の $-\tilde{S}$ 依存性：
 $\kappa_D/\kappa \propto \hat{p}\langle \hat{u} \rangle_r$ は $-\tilde{S}$ の 1 次式に近い。 ∇T_m は $-\tilde{S}$ が非常に大きい場合には Θ_{max} に漸近する。 $-\tilde{S} < \kappa \Theta_W / T_m$ では単純熱伝導分岐に近い。 $-\tilde{S} \leq -\tilde{S}_W$ では $W \leq 0$ なので不安定な減衰振動が生じる。 安定な熱音響自励振動が実現されるのは熱音響自励振動分岐上で $\Theta_W < \nabla T_m \leq 2\Theta_W$ の場合だけです。

$$\frac{\kappa_D}{\kappa} + \frac{1}{2} = \pm \frac{T_m(-\tilde{S})/\kappa}{\Theta_{max}} \quad (5.22)$$

を2本の漸近線とする双曲線です。

熱音響自励振動分岐での $\kappa_D/\kappa \propto \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$ の $-\tilde{S} > 0$ 依存性を図5.4の上図に(5.21)を模式的に示す。小振幅 ($\kappa_D \ll \kappa$) では

$$\frac{\kappa_D}{\kappa} \simeq \left(\frac{-T_m\tilde{S}/\kappa}{\Theta_{max}} \right)^2$$

です。 $\kappa_D = \kappa$ となるのは

$$\frac{T_m(-\tilde{S})/\kappa}{\Theta_{max}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

の場合です。

5.3.4 熱音響自励振動分岐の温度勾配 ∇T_m

$\omega\tau_\alpha \simeq \pi$ かつ $\theta = \pi/4$ の場合に、熱音響自励振動分岐上での ∇T_m と $-\tilde{S} > 0$ との関係は

$$\frac{-\tilde{S}\ell_A}{\Theta_D} (\nabla T_m)^2 + \kappa \nabla T_m = -\tilde{S}T_m \quad (5.23)$$

です。これを導出する。(5.11)と(4.6)とから W_A を消去すると

$$\tilde{S} \nabla T_m = -\frac{1}{\ell_A} \frac{1}{2} \hat{p}\langle\hat{u}\rangle_r$$

となる。これに、(4.14)を使うと

$$\kappa_D = \frac{\ell_A}{\Theta_D} (-\tilde{S} \nabla T_m)$$

となる。これと(5.9)から κ_D を消去すると、(5.23)が得られる。

(5.23)によれば

$$-\tilde{S} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\nabla T_m}{\Theta_{max}}\right)^2} \frac{\kappa \nabla T_m}{T_m} \quad (5.24)$$

ただし

$$\Theta_{max} \equiv T_m \sqrt{\frac{\sigma_A}{\kappa_D}} = \sqrt{\Theta_D \frac{T_m}{\ell_A}} \quad (5.13)$$

は ∇T_m の上限です。

$\nabla T_m \ll \Theta_{max}$ では

$$-\tilde{S} \simeq \left[1 + \left(\frac{\nabla T_m}{\Theta_{max}} \right)^2 \right] \frac{\kappa \nabla T_m}{T_m}$$

なので、熱音響自励振動分岐は単純熱伝導分岐に近い。

熱音響自励振動分岐の $-\tilde{S} > 0$ には、熱力学第二法則による下限が存在する：

$$-\tilde{S} \geq \left(-\tilde{S} \right)_{min} \equiv \frac{1}{1 - \left(\frac{\Theta_{min}}{\Theta_{max}} \right)^2} \frac{\kappa \Theta_{min}}{T_m}$$

これは、(5.24)の右辺の ∇T_m に熱力学第二法則による下限 Θ_{min} を代入することで得られる。

熱音響自励振動分岐の ∇T_m の $-\tilde{S} > 0$ 依存性を図5.4の下図に模式的に示した。比較のために単純熱伝導分岐も示した。

熱音響自励振動分岐上で $\nabla T_m \geq \Theta_W$ となるような $-\tilde{S} > 0$ には下限 $-\tilde{S}_W$ が存在する：

$$-\tilde{S} \geq -\tilde{S}_W \quad (5.25)$$

ここで

$$-\tilde{S}_W \equiv \left[\frac{1}{1 - (\Theta_W/\Theta_{max})^2} \right] \frac{\kappa \Theta_W}{T_m} > \frac{\kappa \Theta_W}{T_m}$$

は熱音響自励振動分岐上で $\nabla T_m = \Theta_W$ となるような $-\tilde{S} > 0$ の値です。熱音響自励振動分岐上でも

$$-\tilde{S} \leq -\tilde{S}_W$$

では、 $\nabla T_m \leq \Theta_W$ つまり $W \leq 0$ なので、安定な熱音響自励振動は生じない。何かの衝撃などが原因で振動が生じてても減衰振動です。

(5.19)を使うと

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\Theta_W}{\Theta_{max}} < 1$$

なので

$$\frac{1}{1 - (\Theta_W/\Theta_{max})^2} \geq \frac{4}{3}$$

です。

$-\tilde{S}_W$ を小さくするには Θ_W/Θ_{max} は小さい方が良い。なお

$$\Theta_W \equiv \frac{-W_A}{w_\theta \beta \frac{1}{2} \hat{p} \langle \hat{u} \rangle_r} = \frac{1}{w_\theta \beta \ell_A} \quad (4.7)$$

を思い出すと、

$$\frac{\Theta_W}{\Theta_{max}} = \frac{1}{w_\theta \beta T_m} \sqrt{\frac{T_m}{\ell_A \Theta_D}}$$

です。 $w_\theta \ell_A$ を大きくすることは、 Θ_W を小さくするだけで無く、 Θ_W/Θ_{max} を小さくするの役に立つ。

5.3.5 熱音響自励振動分岐のエントロピー生成密度

単純熱伝導分岐のエントロピー生成密度は

$$\sigma = \sigma_\kappa \equiv \frac{1}{\kappa} \tilde{S}^2$$

です。

熱音響自励振動分岐のエントロピー生成についても $\omega \tau_\alpha \simeq \pi$ かつ $\theta = \pi/4$ の場合のみ議論する。熱音響自励振動分岐のエントロピー生成密度については

$$\sigma \simeq \frac{2}{T_m} [\nabla T_m - \Theta_{min}] (-\tilde{S}) \quad (5.17)$$

を使う。熱音響自励振動分岐の温度勾配 ∇T_m は既に調べたように $-\tilde{S} > 0$ の増加関数です。

安定な熱音響自励振動が生じる

$$\Theta_W < \nabla T_m < \Theta_{max} \leq 2\Theta_W \quad (5.18)$$

の領域では ∇T_m の $-\tilde{S} > 0$ 依存性が小さい。

熱音響自励振動分岐のエントロピー生成密度(5.17)は、 $-\tilde{S} = -\tilde{S}_W$ では、 $\nabla T_m = \Theta_W$ なので、

$$\sigma = \sigma_W \equiv \frac{2}{T_m} [\Theta_W - \Theta_{min}] (-\tilde{S}_W)$$

ですが、 $-\tilde{S} \gg -\tilde{S}_W$ では、

$$\sigma = \frac{2}{T_m} [\Theta_{max} - \Theta_{min}] (-\tilde{S}) \quad (5.26)$$

に漸近する。

$-\tilde{S} > 0$ が小さいために、大振幅 ($\kappa_D \gg \kappa$) とは言えない場合には、(5.17)はエントロピー生成密度を過小評価していることを思い出そう。

熱音響自励振動分岐のエントロピー生成密度(5.17)の $-\tilde{S} > 0$ 依存性を図5.5に模式的に示す。 $-\tilde{S} > 0$ が同じなら単純熱伝導分岐よりも熱音響自励振動分岐のほうがエ

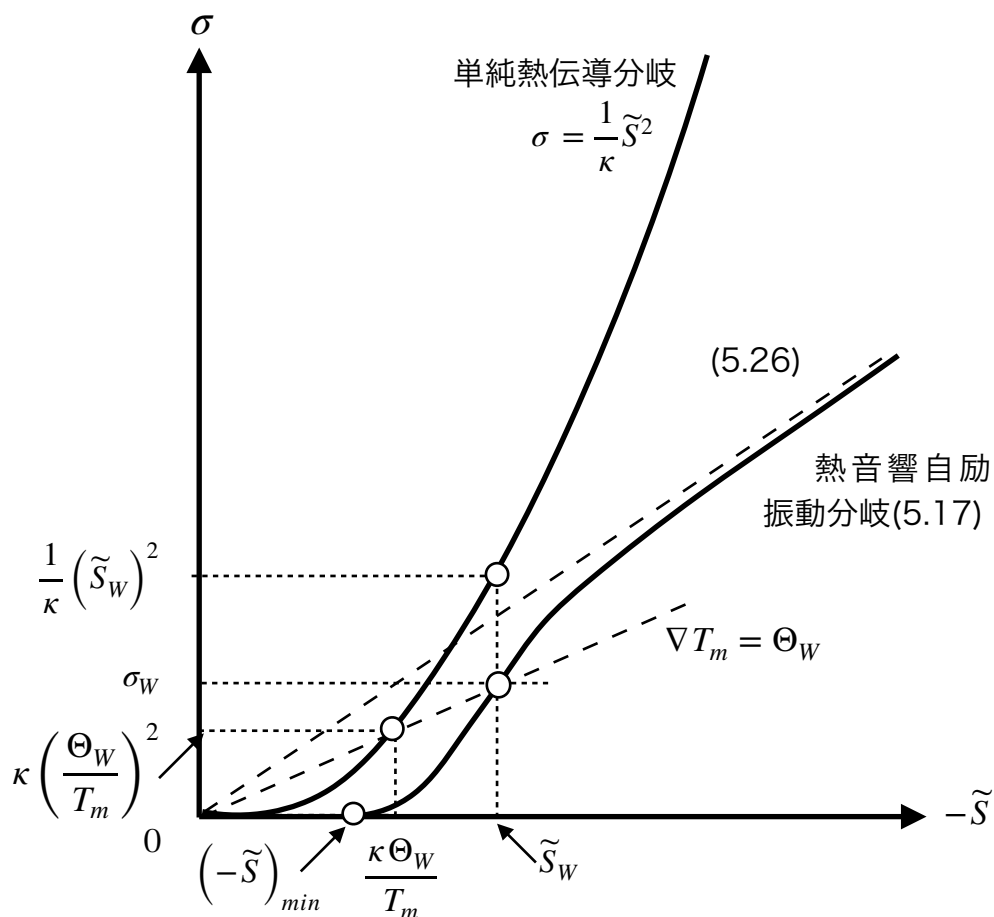


図5.5 $\tilde{S}_\theta = 0$ の場合のエントロピー生成密度 σ の $-\tilde{S}$ 依存性：熱音響自励振動分岐のエントロピー生成密度(5.17)は単純熱伝導分岐のエントロピー生成密度より小さい。 $\nabla T_m > \Theta_W$ では熱音響自励振動が生じることで σ が小さくなる。 $\nabla T_m < \Theta_W$ では、 $W \leq 0$ なので熱音響自励振動が生じない。

エントロピー生成が小さい。エントロピー生成最小の法則により、単純熱伝導分岐よりも熱音響自励振動分岐のほうが安定です。しかし、 $\nabla T_m \leq \Theta_W$ では、 $W \leq 0$ なので、減衰振動です。安定な熱音響自励振動は実現できない。このために、 $\nabla T_m \leq \Theta_W$ で安定なのは単純熱伝導分岐だけです。

エントロピー生成密度が最小になるような状況を

$$\tilde{S} \nabla T_m = W_A \quad (5.11)$$

で近似するというかなり強引なやり方で、熱音響自励振動分岐を議論してきた。それにも関わらず、定性的な理解には役立つような結果が得られた。

死語に熱音響自励振動とプリゴジンが提唱した散逸構造との関係について述べる。プリゴジンによる「平衡状態から遠く離れると散逸構造が生じる」との表現は判りにくい。プリゴジンは、平衡状態からの距離を何で測るのか、遠くとはどの程度なのかを例示していないからです。

定常状態は非平衡状態です。定常状態はその状態を維持する束縛条件がなければ平衡状態へ向かう。定常状態が維持されているのは何らかの束縛条件が存在する筈です。束縛条件が明白なら、平衡状態からの距離も明白でしょう。

単純熱伝導という定常状態を維持しているのはエントロピー流 $-\tilde{S} > 0$ です。平衡状態 ($-\tilde{S} = 0$) からの距離もエントロピー流 $-\tilde{S} > 0$ です。平衡状態からの距離 $-\tilde{S} > 0$ が小さいと、単純熱伝導という定常状態が維持される。

しかし、平衡状態からの距離 $-\tilde{S} > 0$ が大きくなり

$$-\tilde{S} > -\tilde{S}_w \quad (5.25)$$

となると、熱音響自励振動という周期的定常状態が生じる。遠くとは(5.25)です。安定な熱音響自励振動という周期的定常状態は散逸構造の一つです。

<余談>

熱音響現象を理解することを目指した流体物理学的研究はクラマースの1949年論文が最初です。クラマースは線形現象で有名なクラマース・クローニッヒの関係式に名を残した。熱音響現象ではクラマースの研究対象はタコニス振動です。キルヒホッフ理論を拡張したクラマースは、後の熱音響理論の流体物理学的議論の基礎を築いた。

メルクリらの1975年論文以降は熱力学的理解を目指すようになり、20世紀末には熱音響ヒートポンプやドリームパイプのような強制振動に伴う現象の熱力学的理解に成功を収めた。

しかし、熱音響自励振動の振幅や温度勾配の理解は遅れた。エントロピー生成最小の法則に着目した研究が始まったのは21世紀になってからのことです。エントロピー生成最小の法則を使うことで、熱音響自励振動分岐の定性的理解に辿り着いた。

低温物理の牽引者ウィートリー (J.C.Wheatley 1927-86年) が筑波大学を訪れ、竣工したばかりの低温センターを視察したのは1981年頃です。雑談の中で、ウィートリーから研究対象を問われた富永が熱音響自励振動の研究に着手したことを伝えた。すると、既にロスアラモスで共鳴管冷凍機の研究を行っていたウィートリーは、熱音響冷凍機についてはウィートリーが責任をもって研究するから、熱音響自励振動については富永が責任をもって研究することを要請した。熱音響冷凍機と熱音響自励振動をウィートリーと富永が、それぞれ、責任分担するという国際的共同研究の提案です。

1983年8月にロスアラモスで開催された熱音響現象に関わるワークショップ Natural Engineを主催したウィートリーは欠席でした。心臓手術直後のために病室で中継映像を見ていたのです。

1988年2月に熱音響冷凍機の理解を目指した「波動冷凍研究会」が始まったのはウィートリーが59歳で他界して一年半後のことです。それから30年あまり研究会の仲間達に支えられながら、熱音響自励振動分岐の理解に漸く辿り着いた。このことを亡きウィートリーに報告したい。

第6章 非線形性と吸放熱器

熱音響理論では、管内流体の運動については線形近似の流体物理学的議論を行い、その結果を仕事流密度、エントロピー流密度と結びつけ、熱力学的議論を行う。流体物理学的議論は拡張キルヒホッフ理論に基づく。拡張キルヒホッフ理論では、キルヒホッフ理論と同様に、流路断面内で時間平均温度 T_m が一様と仮定されている。線形理論が良い近似の所では、エントロピー生成最小の法則により、流路断面内で T_m が一様です。線形近似が良い近似の所では吸放熱は生じ得ない。しかし、非線形性が顕著な所では、流路断面内での T_m の一様性が破れて吸放熱が生じたり、渦が生じる可能性がある。吸放熱器として動作する可能性があるのは、蓄熱器の両端から変位振幅 $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ 程度の領域である。

6.1 キルヒホッフ理論のモデル：線形性

キルヒホッフ理論（1866年）は、管内流体の振動運動を流体物理学的に議論し、かなりの成功を納めました。一様温度の管の中の音波の分散では $\omega\tau_\alpha$ の広い領域で矢崎らによる21世紀の実験と良く一致する（3.2.4 管内音波の分散）。流体の粘性だけでなくクントの指摘に応じて流体の熱伝導度も考慮したためでしょう。

キルヒホッフ理論が対象とするモデルは、温度と太さが一様の無限に長い円筒管です。温度と太さが一様の無限に長い円筒管ということがこの理論にとって本質的なら、この理論を実験結果と比較することは不可能です。実験に使う管の長さは有限ですし、熱音響機器では屈曲部も含まれる。

実験結果との比較を可能とするように、管の端から変位振幅 $\langle \hat{\xi} \rangle_r \equiv \langle \hat{u} \rangle_r / \omega$ 程度の領域と曲率半径が $\langle \hat{\xi} \rangle_r \equiv \langle \hat{u} \rangle_r / \omega$ より小さい屈曲部を除けばキルヒホッフ理論は実験結果と比較可能と理解することにする。円筒管の中で振動運動する流体は、振動中心が管の端から充分離れていれば、振動中心から前後 $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ 程度では（流路半径や壁温など）環境の変化がない。従って、流体物理学的に線型近似が成り立つからです。

言い換えると、キルヒホッフが温度と太さが一様の無限に長い円筒管というモデルを選んだのは、管内のあらゆる位置で線型近似が成り立つことを意図したのでしょう。

キルヒホッフ理論では時間平均温度 T_m は流路断面内で一様と仮定している。この仮定の根拠はどこにあるのでしょうか？流体物理学では T_m の空間分布を議論することは出来ません。流体物理学では T_m の空間分布は境界条件の一つです。しかし、熱力学を使うと、 T_m の流路断面内分布が議論できます。エントロピー生成最小の法則を使うと、流体要素の運動に非線形性が顕著でなければ、流路断面内での T_m が一様という場合が非一様分布よりも安定です。仮に流路断面内での温度勾配 $\partial T_m / \partial r$ が有限なら、単位体積あたり

$$\kappa \left(\frac{1}{T_m} \frac{\partial T_m}{\partial r} \right)^2$$

だけのエントロピー生成密度が生じる。このエントロピー生成密度を最小にするように自然は

$$\frac{\partial T_m}{\partial r} = 0$$

を選ぶ。

キルヒホッフはエントロピー生成最小の法則を先取りしていたことになります。

吸放熱器はキルヒホッフ理論の対象外です。 $\partial T_m / \partial r = 0$ では吸放熱は不可能だからです。しかし、管に端が存在すると、振動中心から管の端までの距離が変位振幅 $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ 以下のところでは、線型近似が必ずしも良い近似ではないので、渦が発生したり、吸放熱器として機能する可能性 ($\partial T_m / \partial r \neq 0$) がある。

6.2 拡張キルヒホッフ理論のモデル：線形性

管内流体の時間平均温度 T_m は一様とのキルヒホッフの仮定を緩めて、管軸方向の温度勾配 ∇T_m が有限の場合に拡張したのはクラマース（1949年）です。流路断面内での T_m は一様 ($\partial T_m / \partial r = 0$) のままです。これが拡張キルヒホッフ理論です。

拡張キルヒホッフ理論も線形理論です。線形近似が良い近似で成り立つためには、キルヒホッフ理論での要請とは別に、管軸方向の温度分布が

$$|\nabla^2 T_m| \langle \hat{\xi} \rangle_r \ll 2 \nabla T_m$$

あるいは

$$\langle \hat{\xi} \rangle_r \ll \frac{2 \nabla T_m}{|\nabla^2 T_m|}$$

を満足することが必要です。時間平均温度 T_m を変位振幅 $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ でマクローリン展開すると

$$T_m + \nabla T_m \langle \hat{\xi} \rangle_r + \frac{1}{2} \nabla^2 T_m \langle \hat{\xi} \rangle_r^2 + \dots$$

なので、線形近似が良い近似で成り立つためには、 $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ について2次の項が1次の項に比べて充分小さいことが必要だからです。 ∇T_m の不連続点は拡張キルヒホッフ理論の対象外です。

熱音響理論は、流体の振動運動を拡張キルヒホッフ理論を使って議論し、仕事流、エントロピー流などと結びつけました。熱音響理論の結果は、熱音響現象の理解を促進しただけでなく、熱音響機器の設計にも役立ちました。

吸放熱器は、拡張キルヒホッフ理論でも対象外です。キルヒホッフ理論と同様に、 $\partial T_m / \partial r = 0$ では吸放熱が不可能だからです。

吸放熱器として機能することが期待されている部品は熱伝導度の大きい材料で作られるので、吸放熱器と蓄熱器との接続点は ∇T_m の不連続点です。 ∇T_m の不連続点は拡張キルヒホッフ理論の対象外です。 ∇T_m の不連続点からの距離が変位振幅 $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ 以下の領域も、線型近似が必ずしも良い近似ではないので、渦が発生したり吸放熱器として機能する可能性 ($\partial T_m / \partial r \neq 0$) がある。

6.3 蓄熱器両端での吸放熱と吸放熱器

熱音響理論は、流体物理学的議論と熱力学的議論を行うが、いずれも線形近似の議論です。線形近似のために、重ね合わせの原理が使えます。進行波成分と定在波成分との重ね合わせとか、微分方程式をフーリエ変換するなど、線形数学が使えることは線形近似の利点です。

蓄熱器やスタックの両端では、管の内径が不連続な場合には、 $\omega \tau_\alpha$ が不連続です。蓄熱器やスタックの両端に熱伝導度の大きい金属製の部品を設置すると、蓄熱器やスタックの両端で温度勾配 ∇T_m が不連続になる。 $\omega \tau_\alpha$ や ∇T_m の不連続点は特異点です。特異点から $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ 程度のところでは非線形性のために

$$\frac{\partial T_m}{\partial r} \neq 0$$

となり、吸放熱が可能となるのでしょう。

熱音響理論に基づくシミュレーションでは、非線形性を無視して、線形理論を特異点まで外挿する。特異点で連続となる量は、時間平均温度 T_m と振動圧力 p と振動する体積流量 $A \langle u \rangle_r$ です。ここで A は流路断面積です。特異点でも、 p と $A \langle u \rangle_r$ とが連続な

ので、 $A\tilde{I} = A\langle p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t$ も連続です。しかし、特異点ではエントロピー流 $A\tilde{S}$ は不連続です。熱力学第一法則により、このエントロピー流の跳びが吸放熱量に相当する。

特異点でのエントロピー流の跳びは熱電気現象のペルチェ素子と似ている。ペルチェ素子はペルチェ係数の異なる異種導体を接続したものです。導体には電流に比例したエントロピー流が生じる。この比例係数がペルチェ係数です。ペルチェ素子に電流を流すと、異種導体の接続点で温度と電流は連続ですが、異種導体の接続点はペルチェ係数の不連続点であり、電流に比例した吸放熱が生じる。これがペルチェ効果です。

ペルチェ係数はバルクの性質です。異種導体の接続点という特異点からの距離が電子などの平均自由行程程度の領域ではバルクの性質とは異なる。ペルチェ係数の跳びという表現はバルクの性質を特異点まで外挿した表現です。このように吸放熱の理解の仕方もよく似ている。

エントロピー流の跳びが原因の吸放熱を可能とするように径方向温度勾配 $\partial T_m / \partial r$ が有限になる。 $\partial T_m / \partial r$ が零ではエネルギー保存則に抵触するからです。

伝統的熱伝達の議論には吸放熱の原因は温度勾配や温度差にあるかのようなニュアンスを含むが、熱伝導によるエントロピー流は温度勾配に比例するという事実は、エントロピー流と温度勾配との間の数学的關係に過ぎない。エントロピー流の原因は温度勾配であるとか温度勾配の原因はエントロピー流であるというような因果関係ではない。

熱音響現象でのエントロピー流密度は3項の和です：

$$\tilde{S} = \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa$$

ここで \tilde{S}_θ と

$$\tilde{S}_D \equiv -\kappa_D \frac{\nabla T_m}{T_m}$$

は $\omega\tau_a$ に依存し、 \tilde{S}_D と

$$\tilde{S}_\kappa \equiv -\kappa \frac{\nabla T_m}{T_m}$$

は ∇T_m に比例している。

∇T_m の跳びに対応するエントロピー流密度の跳びは $\tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa$ の跳びです。 \tilde{S}_θ は連続です。原動機の蓄熱器では、 $(\kappa_D + \kappa)\nabla T_m / T_m$ が大きいので、蓄熱器両端での ∇T_m の跳びが重要です。

$\omega\tau_\alpha$ の跳びに対応するエントロピー流の飛びは $\tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D$ の跳びです。 $\omega\tau_\alpha$ とは無関係の \tilde{S}_κ は連続です。ヒートポンプの蓄熱器では、 \tilde{S}_θ が大きいので、蓄熱器両端での $\omega\tau_\alpha$ の跳びが重要です。

異径管の接続点は $\omega\tau_\alpha$ の不連続点なので、吸放熱が生じる。仕事流の向きが太い管から細い管の場合には接続点で放熱が生じるが、仕事流の向きが逆の場合には接続点で吸熱が生じる。準静的可逆過程のみ議論する平衡状態の熱力学では、前者は断熱圧縮による温度上昇、後者は断熱膨張による温度降下と呼ばれている。

特に管の開放端は $\omega\tau_\alpha$ の不連続点です。管の中では $\omega\tau_\alpha$ が有限ですが、管の外は $\omega\tau_\alpha = \infty$ です。このために $\nabla T_m = 0$ の管の開放端の近くで吸放熱が生じる。音源が管の外にある場合には開放端の近くで放熱が生じ、音源が管の中にある場合には開放端の近くで吸熱が生じる。

振動中心の位置が特異点から変位振幅 $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ 以下の領域では、非線形性のために、渦が発生や吸放熱の可能性がある。実際、初期の熱音響機器ではスタックや蓄熱器の両端に吸放熱器として機能することを期待した部品が用意されていない。それでも熱音響機器として動作した。逆に、吸放熱器と命名した部品が吸放熱器として機能するとは限らない。吸放熱器として動作する可能性があるのは特異点から $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ 程度のところだけです。

なお、管楽器の開放端も吸熱機として動作するが、変位振幅 $\langle \hat{\xi} \rangle_r$ が小さいので、吸熱機として動作していることを観測するのは困難でしょう。

付録： 第一種ベッセル関数 J_n とその管内音波への応用

ベッセル関数には多くの関数が含まれる。第一種ベッセル関数 J_α と第二種ベッセル関数 Y_α （あるいはノイマン関数 N_α ）だけでなく、ハンケル関数 H_α 、変形ベッセル関数などがあり、円筒座標系で有用です。球座標系で有用なものには球という接頭辞が付く。ベッセル関数はその分類を行った天文学者ベッセル（1784-1846年）の名に因むが、ベッセルの微分方程式の定義をしたのは流体力学の創始者の一人D.ベルヌーイ（1700-1782年）です。

以下では主に α が整数の場合の第一種ベッセル関数 J_n といくつかの公式を紹介する。

A1 ベッセル関数の数学公式

A1.1 階乗

自然数 n の階乗は

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = \sum_{k=1}^n k$$

です。 n を非負整数に拡張する場合には

$$0! = 1$$

と約束する。

負の整数の階乗は形式的に

$$(-1)! = (-3)! = \cdots = \infty$$

$$(-2)! = (-4)! = \cdots = -\infty$$

と約束する。

流体力学の創始者の一人オイラー（1707-83年）はガンマ関数（第2種オイラー積分とも呼ばれる）を導入した。ガンマ関数の定義は $\Re z$ の複素数 z の関数

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

です。この定義から直ちに明らかのように

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

です。

このガンマ関数を使うと、非負の整数 n に対して

$$n! = \Gamma(n + 1) \tag{A.1}$$

です。

ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は階乗の定義域を実部が正の複素数領域にまで拡張したものです。なお記号 $\Gamma(z)$ を使ったのはルジャンドル変換に名を残した数学者ルジャンドル(1752-1833年)とされる。

A1.2 第一種ベッセル関数 J_n の級数展開表示

第一種ベッセル関数の級数展開表示は

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(n + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \tag{A.2}$$

です。ここで $\Gamma(n + m + 1)$ はガンマ関数です。

特に $n + m$ が非負の整数の場合には

$$\Gamma(n + m + 1) = (n + m)!$$

なので

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n + m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \tag{A.3}$$

です。以下では(A.3)をベッセル関数と略称する。

(A.3)は n が非負の整数の場合だけでなく n が負の整数の場合にも形式的に使える。

n が非負の整数の場合に、(A.3)の両辺に $(-1)^n$ を乗じると

$$(-1)^n J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!(n + m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

です。さらに、 $l = m + n > 0$ を使うと、

$$(-1)^n J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{l=n}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l - n)! l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

です。この右辺は(A.3)の n を形式的に $-n$ に置き換えた $J_{-n}(x)$ です。つまり

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{A.4}$$

です。

A1.3 ベッセル関数 J_n の積分表示

ベッセル関数 J_n には積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt \quad (\text{A.5})$$

がある。これを使うと

$$J_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(-nt) dt$$

なので、

$$J_0(0) = 1$$

ですが、 $n \neq 0$ の場合には

$$J_n(0) = 0$$

です。

A1.4 微分公式

(A.3)から直接得られる微分公式には

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (\text{A.6})$$

と

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad (\text{A.7})$$

とがある。これを証明する。(A.3)を使うと

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+n)}$$

です。これを微分すると

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^n J_n(x) \right] = \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n-1+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} = \left(\frac{x}{2}\right)^n J_{n-1}(x)$$

です。最後に両辺に 2^n を乗じると(A.6)が得られる。

同様に

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

を微分すると

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} J_n(x) \right] = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n-1} = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} J_{n+1}(x)$$

です。最後に、両辺に 2^{-n} を乗じると(A.7)が得られる。

微分公式(A.6)と(A.7)を使うと

$$x \frac{dJ_n(x)}{dx} = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \quad (\text{A.8})$$

$$x \frac{dJ_n(x)}{dx} = -xJ_{n+1}(x) + nJ_n(x) \quad (\text{A.9})$$

です。これを証明する。まず

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n \frac{dJ_n(x)}{dx} + n x^{n-1} J_n(x) = x^{n-1} \left[x \frac{dJ_n(x)}{dx} + n J_n(x) \right]$$

に(A.6)を使うと(A.8)が得られる。同様にして

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = x^{-n} \frac{dJ_n(x)}{dx} - n x^{-n-1} J_n(x) = x^{-(n+1)} \left[x \frac{dJ_n(x)}{dx} - n J_n(x) \right]$$

に(A.7)を使うと(A.9)が得られる。

最後の微分公式

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \quad (\text{A.10})$$

は微分公式(A.8)と(A.9)とから $nJ_n(x)$ を消去するだけです。

A1.5 漸化式

微分公式(A.8)と(A.9)とから $dJ_n(x)/dx$ を消去すると、漸化式

$$\frac{n}{x} J_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \quad (\text{A.11})$$

が得られる。

A1.6 不定積分

微分公式(A7,1)と(M7,2)は、それぞれ、不定積分

$$\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) \quad (\text{A.12})$$

と

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x) dx = -x^{-n} J_n(x) \quad (\text{A.13})$$

を意味する。

これを使うと任意の定数 λ に対して不定積分

$$\lambda \int x^n J_{n-1}(\lambda x) dx = x^n J_n(\lambda x) \quad (\text{A.14})$$

と

$$\lambda \int x^{-n} J_{n+1}(\lambda x) dx = -x^{-n} J_n(\lambda x) \quad (\text{A.15})$$

が得られる。これを証明する。(A.14)の両辺に λ^n を乗じると

$$\lambda \int (\lambda x)^n J_{n-1}(\lambda x) dx = (\lambda x)^n J_n(\lambda x)$$

です。 $y = \lambda x$ とすると

$$\int y^n J_{n-1}(y) dy = y^n J_n(y)$$

です。これは(A.12)そのものです。同様に、(A.15)に λ^{-n} を乗じると

$$\lambda \int (\lambda x)^{-n} J_{n+1}(\lambda x) dx = -(\lambda x)^{-n} J_n(\lambda x)$$

です。 $y = \lambda x$ とすると

$$\int y^{-n} J_{n+1}(y) dy = -y^{-n} J_n(y)$$

です。これは(A.13)そのものです。

最後に不定積分

$$\int J_n(\lambda_\alpha x) J_n(\lambda_\nu x) x dx = \left[\frac{\lambda_\alpha x J_{n+1}(\lambda_\alpha x)}{J_n(\lambda_\alpha x)} - \frac{\lambda_\nu x J_{n+1}(\lambda_\nu x)}{J_n(\lambda_\nu x)} \right] \frac{J_n(\lambda_\alpha x) J_n(\lambda_\nu x)}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\nu^2} \quad (\text{A.16})$$

を導出する。ここで λ_α と λ_ν とは任意の定数です。まず

$$\int J_n(\lambda_\alpha x) J_n(\lambda_\nu x) x dx = \int [x^{n+1} J_n(\lambda_\alpha x)] [x^{-n} J_n(\lambda_\nu x)] dx$$

です。この右辺の部分積分は、微分公式(A.6)を使うと、

$$\frac{1}{\lambda_\alpha} x^{n+1} J_{n+1}(\lambda_\alpha x) \left[x^{-n} J_n(\lambda_\nu x) - \frac{d x^{-n} J_n(\lambda_\nu x)}{dx} \right] = \frac{1}{\lambda_\alpha} x J_{n+1}(\lambda_\alpha x) [J_n(\lambda_\nu x) - \lambda_\nu J_{n+1}(\lambda_\nu x)]$$

です。従って

$$\lambda_\alpha^2 \int J_n(\lambda_\alpha x) J_n(\lambda_\nu x) = \lambda_\alpha x J_{n+1}(\lambda_\alpha x) [J_n(\lambda_\nu x) - \lambda_\nu J_{n+1}(\lambda_\nu x)]$$

です。同様にして、微分公式(A.7)を使うと、

$$\lambda_\nu^2 \int J_n(\lambda_\nu x) J_n(\lambda_\alpha x) = \lambda_\nu x J_{n+1}(\lambda_\nu x) [J_n(\lambda_\alpha x) - \lambda_\alpha J_{n+1}(\lambda_\alpha x)]$$

です。前者から後者を差し引いてから $\lambda_\alpha^2 - \lambda_\nu^2$ で割ると(A.16)が得られる。

A1.7 定積分

不定積分(A.14)から定積分

$$\lambda \int_0^1 z^n J_{n-1}(\lambda z) dz = J_n(\lambda) \quad (\text{A.17})$$

が容易に得られる。特に $n = 1$ では

$$\lambda \int_0^1 z J_0(\lambda z) dz = J_1(\lambda) \quad (\text{A.18})$$

です。

不定積分(A.16)からは定積分

$$\int_0^1 \frac{J_n(\lambda_\alpha x)}{J_n(\lambda_\alpha)} \frac{J_n(\lambda_\nu x)}{J_n(\lambda_\nu)} x dx = \frac{\frac{\lambda_\alpha J_{n+1}(\lambda_\alpha)}{J_n(\lambda_\alpha)} - \frac{\lambda_\nu J_{n+1}(\lambda_\nu)}{J_n(\lambda_\nu)}}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\nu^2} \quad (\text{A.19})$$

が容易に導出できる。特に $n = 0$ の場合には

$$\int_0^1 \frac{J_0(\lambda_\alpha x)}{J_0(\lambda_\alpha)} \frac{J_0(\lambda_\nu x)}{J_0(\lambda_\nu)} x dx = \frac{\frac{\lambda_\alpha J_1(\lambda_\alpha)}{J_0(\lambda_\alpha)} - \frac{\lambda_\nu J_1(\lambda_\nu)}{J_0(\lambda_\nu)}}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\nu^2} \quad (\text{A.20})$$

です。(A.20)で $\lambda_\nu = 0$ の場合にも(A.18)となる。

A2. 管内音波への応用

管内音波の重要な無次元パラメーターに

$$\begin{aligned} \omega \tau_\alpha &\equiv \frac{\omega r_0^2}{2\alpha} \quad \text{と} \quad \omega \tau_\nu \equiv \frac{\omega r_0^2}{2\nu} \\ \lambda_\alpha &= (1-i)\sqrt{\omega \tau_\alpha} \quad \text{と} \quad \lambda_\nu = (1-i)\sqrt{\omega \tau_\nu} \\ \text{Pr} &\equiv \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\tau_\alpha}{\tau_\nu} = \left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\nu} \right)^2 \end{aligned}$$

などがある。

内半径 r_0 の管の径方向の位置 r の無次元関数

$$f_\nu(r) \equiv \frac{J_0\left(\lambda_\nu \frac{r}{r_0}\right)}{J_0(\lambda_\nu)}$$

の流路断面内平均は

$$\chi_\nu \equiv \langle f_\nu(r) \rangle_r = \frac{2}{\lambda_\nu} \frac{J_1(\lambda_\nu)}{J_0(\lambda_\nu)} \quad (3.5)$$

です。(3.5)は

$$\chi_\nu \equiv \langle f_\nu(r) \rangle_r = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} f_\nu(r) 2\pi r dr = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} f_\nu(r) r dr = \frac{2}{J_0(\lambda_\nu)} \int_0^1 J_0(\lambda_\nu t) t dt$$

に定積分(A.18)を使うと得られる。

また

$$\chi_\nu = 1 + \frac{J_2(\lambda_\nu)}{J_0(\lambda_\nu)} \quad (\text{A.21})$$

です。ベッセル関数の漸化式

$$\frac{n}{x} J_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \quad (\text{A.11})$$

を使うと

$$\frac{1}{\lambda_\nu} J_1(x\lambda_\nu) = \frac{1}{2} [J_0(\lambda_\nu) + J_2(\lambda_\nu)]$$

なので

$$\frac{2 J_1(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu J_0(\lambda_\nu)} = \frac{J_0(\lambda_\nu) + J_2(\lambda_\nu)}{J_0(\lambda_\nu)} = 1 + \frac{J_2(\lambda_\nu)}{J_0(\lambda_\nu)}$$

です。これを(3.5)と比べると(A21)が得られる。

次に

$$\langle f_\alpha f_\nu \rangle_r = \frac{\text{Pr} \chi_\alpha - \chi_\nu}{\text{Pr} - 1} \quad (\text{A.22})$$

を証明する。まず

$$\langle f_\alpha(r) f_\nu(r) \rangle_r = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \frac{J_0(\lambda_\alpha \frac{r}{r_0})}{J_0(\lambda_\alpha)} \frac{J_0(\lambda_\nu \frac{r}{r_0})}{J_0(\lambda_\nu)} 2\pi r dr = 2 \int_0^1 \frac{J_0(\lambda_\alpha x)}{J_0(\lambda_\alpha)} \frac{J_0(\lambda_\nu x)}{J_0(\lambda_\nu)} x dx$$

です。積分公式(A.20)を使って積分を実行してから(3.5)を使うと

$$2 \int_0^1 \frac{J_0(\lambda_\alpha x)}{J_0(\lambda_\alpha)} \frac{J_0(\lambda_\nu x)}{J_0(\lambda_\nu)} x dx = \frac{\lambda_\alpha 2 \frac{J_1(\lambda_\alpha)}{J_0(\lambda_\alpha)} - \lambda_\nu 2 \frac{J_1(\lambda_\nu)}{J_0(\lambda_\nu)}}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\nu^2} = \frac{\lambda_\alpha^2 \chi_\alpha - \lambda_\nu^2 \chi_\nu}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\nu^2}$$

です。最後に、

$$\text{Pr} \equiv \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\tau_\alpha}{\tau_\nu} = \left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\nu} \right)^2$$

を使うと(A16)が得られる。

最後に

$$\langle f_\alpha^\dagger f_\nu \rangle_r = \frac{\text{Pr} \chi_\alpha^\dagger + \chi_\nu}{1 + \text{Pr}} \quad (4.9)$$

を証明する。まず

$$\langle f_\alpha^\dagger(r) f_\nu(r) \rangle_r = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \frac{J_0(\lambda_\alpha^\dagger \frac{r}{r_0})}{J_0(\lambda_\alpha^\dagger)} \frac{J_0(\lambda_\nu \frac{r}{r_0})}{J_0(\lambda_\nu)} 2\pi r dr = 2 \int_0^1 \frac{J_0(\lambda_\alpha^\dagger x)}{J_0(\lambda_\alpha^\dagger)} \frac{J_0(\lambda_\nu x)}{J_0(\lambda_\nu)} x dx$$

です。積分公式(A.20)を使って積分を実行してから(A14)を使うと

$$2 \int_0^1 \frac{J_0(\lambda_\alpha^\dagger x)}{J_0(\lambda_\alpha^\dagger)} \frac{J_0(\lambda_\nu x)}{J_0(\lambda_\nu)} x dx = \frac{\lambda_\alpha^{\dagger 2} \frac{J_1(\lambda_\alpha^\dagger)}{J_0(\lambda_\alpha^\dagger)} - \lambda_\nu 2 \frac{J_1(\lambda_\nu)}{J_0(\lambda_\nu)}}{(\lambda_\alpha^\dagger)^2 - \lambda_\nu^2} = \frac{(\lambda_\alpha^\dagger)^2 \chi_\alpha - \lambda_\nu^2 \chi_\nu}{(\lambda_\alpha^\dagger)^2 - \lambda_\nu^2}$$

です。最後に、

$$\left(\frac{\lambda_\alpha^\dagger}{\lambda_\nu}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 \text{Pr} = -\text{Pr}$$

を使うと(4.9)が得られる。

あとがき

「ベトナム戦争の際に米軍の要請でベトナム語を調べた言語学者がベトナム語には一人称代名詞が無いことに驚いた」との記事を読んだ記憶がある。ベトナム語にも一人称代名詞や二人称代名詞があるが、よそよそしい印象をもたらすので、初対面程度しか使われない。このことが「ベトナム語には一人称代名詞が無い」ことの根拠らしい。

自分や相手を表現する言葉は、ベトナム語では互いの関係に依存し多岐にわたる。互いの関係を無視した用語はほとんど使われない。多少なりとも顔見知りであれば、お互いの年齢を確認のうえ、相手が年上なのか、年下なのか、男性なのか、女性なのかで表現が変わる。年上であれば自分の両親より上か下か等の区別により、相手を表す語だけでなく自分を表す語も変化する。

他者との関係を重視するベトナム語は、個性を重視し他者との関係を軽視する文化圏の人々にとって、かなり異質に見えたのだろう。

右と左とは対概念です。上と下も対概念です。対概念の片方だけを独立に定義することは難しい。示量性状態量と輸送量（あるいは移動量）と生成量とは一組の概念です。一組の概念の構成要素を独立に定義することは困難です。一組の概念とはその構成要素の間の関係に着目した関係概念だからです。

それぞれの概念ごとに対応する神が存在する多神教では、神話に登場する神々の世界を通して関係概念が構成される可能性があるが、一神教では、全ての概念が全知全能の唯一神と関係づけられているのだろう。

不動の大地を信じ、地球を中心として天球が廻転するとの自己中心的宇宙観が常識だった西欧の16世紀にコペルニクス（1473-1543年）が唱えた地動説は、ガリレイ（1564-1642年）に受け継がれ、惑星の軌道を研究したケプラー（1571-1630年）によりケプラーの法則へと発展した。円軌道に執着したガリレイは楕円軌道を容認しなかったが、ケプラーの第一法則は楕円軌道であることを示し、ケプラーの第二法則は角運動量保存則を示した。ケプラーの第三法則は惑星の公転周期と軌道半径との関係である。ニュートン（1643-1727年）の万有引力の法則（1665年）はケプラーの法則を全て導出した。

太陽中心の地動説には太陽に固定された絶対座標という概念が存在する。この絶対座標は20世紀アインシュタイン（1879-1955年）の特殊相対論（1905年）まで続いた。絶対座標の代わりに登場したのが、互いの相対速度が異なるだけの無数の慣性系である。

ギリシャ時代まで遡るとされる原子概念、その後の元素、熱素、分子、素粒子などの概念は、宇宙が不成不滅な基本粒子から構成されているとの思い込みの表れです。熱学の熱素は既に無視されている。多数の元素が周期表に分類されたように、多数の素粒子が発見され分類されている。相互作用の素粒子化を通して、粒子と相互作用との境界は曖昧になった。

粒子よりも抽象的な質量、運動量、エネルギーなどが姿や形を変えても不成不滅であるとの経験則が、それぞれ、質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則です。不変性や永続性を望む人々にとって、不成不滅な基本粒子や不成不滅を主張する保存則は受け容れやすい。

日本文化に興味津々で日本留学を果たしたフランス人が、帰国前に、次のような感想を述べた。西洋人は時の流れが止まることを恐れる。西洋音楽では一小節の最後の拍の音を大事に扱い次の小節へ繋げる。バルセロナのサグラダファミリアは、19世紀末に着工してから1世紀以上経過しても完成しない。時の流れが止まらないように建設を続けるサグラダファミリアは建設中であることに意味がある。日本人は、時の流れを止めることを恐れだけでなく、リズムを崩したり、時の流れを止めることに美意識を感じる。歌舞伎の見得、音楽の間だけではない。葛飾北斎の諸国滝巡りの一つ「下野黒髪山きりふりの滝」や富岳百景の一つ「神奈川冲浪裏」は動画の一コマです。西洋と日本とは時間感覚がかなり違う。

時計は熱力学的時計から始まった。水時計は細い管の中を流れる水の量が圧力差と水の粘性で決まることを使い、ロウソク時計、ランプ時計、香時計は燃焼速度を基準とする。いずれも不可逆過程に依存するという意味で、過去から未来へ向かう時の経過を計るのに相応しい。しかし、熱力学的時計は、時の刻みが不安定だった。周期性に着目する力学的時計は振動周期を時の刻みの基準とする。17世紀にガ

リレイが気付いた振り子の等時性を使って、ホイヘンス(1629-95年)が振り子時計を作った(1673年)。振り子の長さにより振動周期が決まる。振り子が水晶振動子に代わったクォーツ時計、セシウムやルビジウムを使った原子時計も力学的時計です。力学的時計は時の刻みが正確だが、時の流れの方向は力学的時計では決まらない。時の流れの方向は熱力学第二法則で決まる。

熱音響理論で重要なパラメーター $\omega\tau_\alpha$ は興味深い。 $\omega\tau_\alpha$ は流体の熱拡散という不可逆過程に基づく特徴的時間 τ_α を使って流体の振動運動の周波数 ω を無次元化したものなので、周期性に基づく機械式時計と不可逆過程に基づく熱力学的時計の融合です。

熱力学第二法則は、エントロピー増大則とも呼ばれるように、保存則には従わないエントロピー概念を対象とし、時の流れの方向性を規定する。力学や保存則に慣れ親しんだ人の中には、例えば19世紀のエネルギー論者のように、熱力学第一法則は受け容れるがエントロピーを拒否する人もいた。

熱力学はエネルギーやエントロピーなど視覚的に捉えることが困難な抽象的量を扱うので、図示することが難しい。般若心経の色即是空・空即是色は、五感で把握できる具象と五感では認識できない抽象とが表裏一体であると説く。抽象的な熱力学は仏教を通じて抽象概念に慣れ親しんでいる東洋人には受け容れやすい。

仏教は時の流れを無常観と結びつけた。平家物語の冒頭「祇園精舎の鐘の声 諸行無常の響きあり、傲れるもの久しからず 盛者必衰の理をあらわす」は生々流転あるいは万物流転から始まる。一定不変なものはないという意味での無常です。

無常観に親しんでいると、保存則だけでなく、エントロピー増大則をも躊躇なく受け容れる。地震と火山と温泉に恵まれた日本が20世紀のプレートテクトニクスを容易に受け容れたことも無常観と関わりがあるのだろう。

定常状態は、非平衡状態であり、エントロピー生成が有限です。平衡状態から離れるにつれてエントロピー生成が大きくなる。平衡状態から離れ過ぎるとエントロピー生成の小さい別の定常状態が出現することがある。この新しい定常状態がプリゴジンの散逸構造です。保存量ではないエントロピーはエントロピー生成最小の法

則を選択則として新たな構造を作り出す。このことは、社会の格差という無駄や歪みが大きくなりすぎると革命的变化が生じて新たな社会が生まれるのと似ている。

琵琶哲志さんの著書『熱音響デバイス』の出版を記念して、2018年11月17日に研究会が開催された。この研究会で「熱音響理論：私の理解」と題して講演したが、支離滅裂で、すっきりしない。誤りを正し、全体構成を見直すうちに、言いたかったことがおぼろげながら判ってきたように思う。

2020年 8月 9日 長崎原爆忌